Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

В. С. ЛЮКШИН

ИНВАРИАНТНОСТЬ ЧИСЛА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ НАИБОЛЬШЕГО ЧИСЛА АРГУМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБРАЩЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. I, II

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 3 VII 1939)

Задача об обращении дифференцирования состоит в нахождении решения системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

с указанием числа произвольных функций и констант; здесь u — искомая функция, $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ — данные функции от n независимых переменных, предполагаемые голоморфными в окрестности, например $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Система (1) является простейшей среди системы дифференциальных уравнений, рассмотренных и изученных Riquier'ом, Janet'ом [1], Thomas'ом [2]. Употребляемый ими метод основан на созданной Riquier'ом теории мономов. Метод требует упорядочения переменных, в зависимости от чего число произвольных функций и констант в решении системы (1) может фактически меняться.

Мы покажем, что число произвольных функций, зависящих от наибольшего числа независимых переменных, является инвариантным: оно не зависит от упорядочения переменных.

Искомую функцию представим рядом Маклорена

$$u = \sum_{i_1, i_2 \ldots i_n} a_{i_1, i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1}, x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \tag{2}$$

сходящимся в окрестности $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Вместо какой-нибудь производной $\dfrac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1}, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}}$ рассматривают поставленное ей в соответствие символическое произведение $x_1^{i_1}, x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, называемое мономом. Показатели $i_1, i_2 \ldots i_n$ — целые положительные числа или нули, $x_k = 1$.

Данной системе дифференциальных уравнений (1) соответствует семейство мономов $M\{m\}$,

$$m = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Обозначим наибольший из показателей x_k в мономах данного семейства M через j_k; назовем совокупность чисел $j_1, j_2 \ldots j_n$ индексом семейства. Назовем x_k множителем монома m, если последний содержит $x_k^{j_k}$, и x_k немножителем монома m, если показатель α_k при x_k будет $\alpha_k < j_k$. Умножением мономов семейства M на их множители и немножители образуются все кратные этих мономов.

Умножая m на немножители и умножая вновь полученные мономы на их немножители, мы получим так называемое полное семейство мономов M^*, соответствующее данному семейству M и такое, что умножение мономов M^* на немножители не выводит нас из этого семейства. Полное семейство M^*, индекс которого есть $j_1, j_2 \ldots j_n$, содержит единственный моном $m^* = x_1^{j_1}, x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$.

Кроме мономов, кратных мономам M, могут быть мономы, им не кратные, называемые дополнительными. Чтобы образовать последние, надо найти все те делители m^*, которые не делятся ни на один моном из M^*. Дополнительное к M семейство мономов обозначим через $\overline{M}$. Очевидно, что $\overline{M} + M^*$ содержит все делители m^*. Семейства $\overline{M}$ и M^* называются еще (по Thomas'у) абсолютными дополнительными и полными семействами. Определение множителя и немножителя монома из $\overline{M}$ остается прежним.

Из 2 мономов $m = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и $m' = x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$, если $m \neq m'$, назовем m высшего абсолютного ранга нежели m', если ни одна из разностей $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2 \ldots \alpha_n - \beta_n$ не отрицательна.

Свойство мономов $\overline{M} + M^*$ и им кратных следующее: всякий моном есть кратный единственного монома из $\overline{M} + M^*$ наивысшего абсолютного ранга по сравнению с теми мономами из $\overline{M} + M^*$, которые делят рассматриваемый моном. Кратные, лежащие вне $\overline{M} + M^*$ получаются из этого единственного монома умножением на его множители.

Назовем в этом последнем случае такой моном, принадлежащий к $\overline{M}$ или к M^*, образующим мономом; порождаемое им умножением только на его множители бесчисленное множество кратных мономов называется классом; число множителей образующего монома называется его измерением, а также и измерением класса, порожденного этим мономом.

Вся совокупность мономов, кратных $\overline{M} + M^*$, разделяется на конечное число неперекрывающихся классов. Число всех мономов, входящих в $\overline{M} + M^*$, очевидно, равно $Q = (j_1 + 1)(j_2 + 1) \ldots (j_n + 1)$, а число образующих мономов равно $Q = j_1, j_2 \ldots j_n$.

Разложение (2) функции u можно теперь представить в виде конечного числа Q слагаемых

$$u = \sum m_s F_s, \tag{3}$$

где m_s — моном из $\overline{M} + M^*$, а F_s — функция, когда m_s — образующий моном, причем аргументы F_s суть множители m_s; для остальных необразующих мономов F_s суть постоянные.

По теореме Thomas'а [(2)Chap. XI], позволяющей найти все F_s, соответствующие мономам m_s из M^*, искомая функция u определяется полностью и единственным способом.

Число произвольных функций решения u в точности равно числу образующих мономов дополнительного абсолютного семейства $\overline{M}$; число аргументов этих прозвольных функций определяется измерением соответствующего монома, а число произвольных констант равно числу оставшихся в $\overline{M}$ необразующих мономов. Среди произвольных функций имеется некоторое число функций, зависящих от наибольшего числа аргументов; это число аргументов всегда меньше n.

Теория Janet'а [1] опирается на другое построение семейств мономов. Особенностью этой теории является упорядочение переменных и образование так называемой полной системы. Искомая функция u представляется в виде разложения (3) с числом слагаемых, вообще меньшим, но определение F_s в точности прежнее. Число этих слагаемых существенно зависит от упорядочения независимых переменных.

Мы покажем теперь, что разложение Janet'а получается из (3) аналогично тому, как Thomas получает свои «относительные» семейства из абсолютных; что определения Janet'а множителей мономов семейства M, множителей дополнительного семейства, получаются на основании одного и того же правила; что мономы, порождающие бесконечные классы Janet'а, суть некоторые образующие мономы; наконец, что число образующих мономов дополнительного семейства с наибольшим числом множителей остается неизменным при всяком упорядочении независимых переменных.

Введем вместо образующего монома m_s в (3) новый моном m_s' такой, что: 1) m_s' принадлежит к $\overline{M}+M^*$; 2) отношение $m_s : m_s'$ состоит только из множителей m_s; 3) замена m_s через m_s' производится в определенном порядке, например в порядке возрастания номеров x, начиная с x_1; 4) моному m_s' припишем все множители m_s. Тогда все кратные m_s', полученные при помощи умножения m_s' на его множители, образуют новый бесконечный класс, включающий прежний класс, соответствующий моному m_s, и несколько необразующих мономом, для $\overline{M}+M^*$. Назовем m_s' новым образующим мономом, а полученные из $\overline{M}$ и M^* семейства относительными семействами $\overline{M}_{rel}$ и M^*_{rel}.

При указанном расширении классов множители мономов, порождающих эти классы, остаются теми же, которые порождали первоначальные классы.

По определению Janet'а, x_i будет множителем тех мономов, которые имеют одинаковые произведения $x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$, а x_i имеет наибольший показатель α_i. Разбив все мономы на группы с одинаковыми $x_n^{\alpha_n}$, $x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$, мы в каждой группе найдем мономы с наибольшими показателями x_i. Пусть эти показатели будут $\alpha_i = \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_\lambda$. Среди последних будет наибольший, равный j_i. Дополним теперь данное семейство мономов кратными умножением на x_i так, чтобы довести степень x_i^γ до $x_i^{j_i}$. Полученные мономы будут иметь x_i множителем в прежнем смысле. Возвращение к исходному семейству мономов достигается в точности по указанному выше способу, ибо отношение мономов заменяемого к заменяющему содержит $x_i^{j_i-\gamma}$, т. е. содержит только множитель заменяющего монома. Мономы, имеющие x_i множителями по Janet'у, будут, по нашему, новыми образующими мономами. Повторив эти рассуждения для всех x_i, взятых в определенном порядке, а также пополнив первоначальное семейство мономов кратными путем умножения на немножителей мономов и применив предыдущее рассуждение, мы получим, что семейство мономов, которым Janet пользуется для решения системы (1),— одно из относительных семейств M^*_{rel}. Совершенно так же доказывается, что дополнительные семейства Janet'а [([3]) Chap. I, p. 17] $N^{(n)}$, $N^{(n-1)} \ldots N^{(1)}$ получаются из $\overline{M}$ и образуют относительное дополнительное семейство $\overline{M}_{rel}$. Для этого надо только доказать, что определение множителей мономов семейств Janet'a N совпадает с определением множителей мономов семейства M.

Действительно, чтобы получить, например, $N^{(n)}$, рассматриваются все мономы x_n^β, где $\beta \geqslant 0$, $\beta < j_n$ и $\beta \neq \alpha_n$, т. е. β не равно ни одному показателю x_n в мономах семейства M_{rel}^*. Тогда $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, по определению, — множители мономов x_n^β. Очевидно, что это определение не отличается от определения множителя монома M, ибо моном, например $x_n^\beta x_{n-1}^0$, единственный, поэтому x_{n-1} множитель монома x_n^β и т. д.

Взяв теперь моном $m = x_n^\beta, x_{n-1}^{j_{n-1}} \ldots x_1^{j_1}$, мы видим, что частное $m : x_n^\beta$ содержит только множители m, поэтому x_n^β — новый образующий моном с множителями $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$. Таким же путем мы получаем все $N^{(i)}$ Janet'а и убеждаемся, что они составляют одно из относительных дополнительных семейств $\overline{M}_{rel}$.

При некотором определенном порядке независимых переменных построим дополнительное к «полной системе» семейство мономов N. Оно совпадает с некоторым $\overline{M}_{rel}$. Все образующие мономы $\overline{M}_{rel}$ посредством своих множителей порождают неперекрывающиеся классы из мономов, не кратных M_{rel}^*. Пусть m' — некоторый образующий моном из $\overline{M}_{rel}$ с наибольшим числом множителей k.

Умножением на них мы получим образующий моном $\overline{m}$ из $\overline{M}$ с тем же числом множителей k. Очевидно, что класс остался того же измерения и порождается теми же множителями. Вместе с этим будут получены образующие мономы, принадлежащие к $\overline{M}$, но меньшего числа измерения, ибо мономы, предшествующие $\overline{m}$, должны его делить и содержащиеся в частном множители делимого $\overline{m}$ будут немножителями делителей.

Таким путем из всех образующих мономов $\overline{M}_{rel}$ мы получим абсолютное дополнительное семейство $\overline{M}$. Заметим, что умножение на немножителей не потребуется потому, что, либо мы перейдем при таком умножении в следующий бесконечный класс, порождаемый другим образующим, либо получим моном, не входящий ни в один из бесконечных классов, но принадлежащий дополнительному семейству; такой моном — также не новый, так как он был получен при самом образовании N. Итак, при переходе от $\overline{M}_{rel}$ к $\overline{M}$ множители не меняются.

Пусть мы имеем два разных порядка аргументов и соответственно два относительных дополнительных семейства с числами мономов μ и ν, зависящими от наибольшего числа множителей.

По указанному выше способу, из этих семейств мы получим абсолютные дополнительные семейства; последние должны быть одинаковыми и число образующих мономов в них не зависит от упорядочения переменных, так как при построении $\overline{M}$ порядок переменных не играл роли; итак, число мономов $\mu = \nu$, значит число произвольных функций в разложении u, зависящих от наибольшего числа аргументов, должно быть постоянным для данной системы (1).

Геометрический семинарий
при Отделении технических наук
Академии Наук СССР

Поступило
4 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Janet, Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées, P. (1929).
[2] J. M. Thomas, Differential systems N.-Y. (1937).