ВОЗДЕЙСТВИЕ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ НА НЕРАВНОВЕСНУЮ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ С ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль

Гомельский государственный технический университет, ***shablovsky-on@yandex.ru***

Введение. Теплофизические аспекты проблемы формирования периодических структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок [1,2] рассмотрены в работах [3, 4]. Установлено, что в среде, обладающей локально-неравновесными свойствами, пространственно-периодические структуры (полосы, ячейки, решетки и др.) образуются под влиянием конкуренции между температурными областями с тепловыделением и теплоотдачей. Примером такой конкуренции является выделение кристаллизационного тепла на фазовой границе и теплоотдача в подложку, на которую напылена аморфная пленка. Важным параметром процесса служит температура $T = T_0$ при которой тепловыделение и теплоотдача уравновешиваются, т.е. взрывная кристаллизация прекращается. В данной работе рассматриваются локально-неравновесные свойства динамического внешнего воздействия на уже сформировавшиеся тепловые структуры. Изучаемая теплофизическая система содержит следующие элементы: 1) среда, обладающая локально-неравновесными тепловыми свойствами; 2) знакопеременный объемный источник энергии $q_\upsilon = q_\upsilon^1 (T - T_0), q_\upsilon^1 > 0, \quad q_\upsilon^1, T_0 - \text{const}$; 3) внешний по отношению к среде источник энергии W, действующий на линии $x = 0$ и возбуждающий стоячую волну. Рассматриваем интересный в практическом отношении случай, когда вне линии $x = 0$ двухмерное температурное поле среды (материала) представляет собой в исходном состоянии стационарную пространственно-периодическую структуру. Цели исследования: 1) проанализировать локально-неравновесные процессы воздействия стоячей волны на материал; 2) изучить морфологические свойства поля изотерм.

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла [5] в плоском двухмерном случае имеет вид:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = q_\upsilon \tag{1}$$

$$q_x + \gamma \frac{\partial q_x}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \; q_y + \gamma \frac{\partial q_y}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \; \lambda, c, \gamma - \text{const}. \tag{2}$$

Производство энтропии подсчитываем по формулам [5, 6]:

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_e, \tag{3}$$

$$\sigma_i = \frac{q_x^2 + q_y^2}{\lambda T^2}, \quad \sigma_e = \frac{q_\upsilon}{\Theta}, \quad \frac{1}{\Theta} = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{\gamma\left(q_x^2 + q_y^2\right)}{\lambda c T^2}\right).$$

где σ_i - производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов, σ_e - производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; $\boldsymbol{q}(q_x, q_y)$ - вектор удельного теплового потока. Остальные обозначения такие: T - температура; Θ - неравновесная температура; c - объемная теплоемкость; λ - коэффициент теплопроводности; x, y - прямоугольные декартовы координаты; t - время; q_υ - мощность внутренних источников тепла.

Систему уравнений теплопереноса (1), (2) преобразуем к одному гиперболическому уравнению

$$c\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+\gamma\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}\right)+q_\upsilon+\gamma\frac{\partial q_\upsilon}{\partial t}, \qquad (4)$$

где $\tau = T - T_0$ есть отклонение температуры от ее равновесного значения T_0.
Возбуждение стоячей волны в пространственно-периодическом тепловом поле на основе параболического уравнения теплопроводности рассмотрено в [7]. Для локально-неравновесной среды в работе [8] изучены тепловые режимы, при которых существуют стоячие волны температуры и теплового потока.

Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\lambda \to \overline{\lambda}\lambda', c \to \overline{c}c', \gamma \to \gamma', q_\upsilon \to \overline{q}_\upsilon q'_\upsilon, T \to T', \sigma \to \sigma',$$
$$q_x \to q'_x, q_y \to q'_y, t \to t', x \to x', y \to y',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы

$$\overline{\lambda}=\frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b}, \quad \overline{c}=\frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b}, \quad \overline{q}_\upsilon=(q_\upsilon)_b\frac{x_b}{q_b}$$

составлены из масштабов величин (они отмечены индексом b), применяемых для обезразмеривания: $c = c'c_b$, $\lambda = \lambda'\lambda_b$, $\gamma = \gamma' t_b$, $T = T'T_b$, $\sigma = \sigma'\sigma_b$, $q_x = q'_x q_b$, $q_y = q'_y q_b$, $q_\upsilon = q'_\upsilon (q_\upsilon)_b$, $x = x'x_b$, $y = y'y_b$, $t = t't_b$, $q_b = \lambda_b T_b / x_b$, $(q_\upsilon)_b = \lambda_b T_b / x_b^2$, $\sigma_b = q_b^2/(\lambda_b T_b^2)$.
Все вычисления выполнены в безразмерных переменных при $\overline{\lambda}=1$, $\overline{c}=1$, $\overline{q}_\upsilon=1$, $\lambda'=1$, $c'=1$. Далее штрих над безразмерными величинами не пишем.

Стоячая волна в неравновесном тепловом поле. Решение уравнения (4) представим в виде

$$\tau(x,y,t)=\tau_s(x,y)+\tau_{nst}(x,y,t), \qquad (5)$$

где $\tau_s(x,y)$ - стационарная часть решения, относящаяся к установившейся во времени $(t\to\infty)$ температуре; $\tau_{nst}(x,y,t)$ - нестационарное решение, учитывающее время релаксации теплового потока и определяющее волновые свойства температурного поля. В качестве примера стационарной периодической структуры берем семейство прямоугольников:

$$\tau_s(x,y)=D\cos(h_1 x)\sin(h_2 y), \qquad (6)$$
$$h_1^2+h_2^2=q_\upsilon^1/\lambda;\ h_1, h_2, D-\text{const}.$$

Эти прямоугольники образованы линиями $h_1 x = 2\pi n_0 \pm (\pi/2)$, $h_2 y + \beta = \pi n_0$, где $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ - любое целое число. Очевидно, что в частном случае $h_1 = 0$ решение (6) дает зависимость

$$\tau_s(x,y) = D\sin(h_2 y)\,, \tag{7}$$

и нейтральная изотерма $T = T_0$ образует семейство полос $h_2 y = \pi n_0$. Полосчатую структуру (7) рассматриваем как отдельный вариант, потому что он важен в практическом отношении и заключает в себе многие существенные свойства изучаемого процесса.

Нестационарная составляющая температуры представляется выражением

$$\tau_{nst}(x,y,t) = A(x,t)\sin(hy),\ h \equiv \text{const}, \tag{8}$$

где $A(x,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left(c - \gamma q_\upsilon^1\right)\frac{\partial A}{\partial t} + c\gamma\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + A\left(q_\upsilon^1 - \lambda h^2\right).$$

Строим решение

$$A(x,t) = A_1\exp(-rx)\left[\sin(\omega t - kx) + B_1\cos(\omega t - kx)\right], \tag{9}$$

где A_1, B_1 - произвольные постоянные, и находим

$$\omega^2 = \frac{1}{c\gamma}\left[\lambda\left(k^2 - r^2\right) + \lambda h^2 - q_\upsilon^1\right],\ k = \frac{\omega(c - \gamma q_\upsilon^1)}{2\lambda r}. \tag{10}$$

Не нарушая качественных свойств решения (9), примем далее, что $q_\upsilon^1 = \lambda h^2$. Таким образом, частота колебаний по времени равна

$$\omega = 2\lambda r^2 \Big/ \left[(c - \gamma q_\upsilon^1)^2 - 4\lambda r^2 c\gamma\right]^{1/2},$$

причем параметры процесса должны удовлетворять неравенству:

$$(c - \gamma q_\upsilon^1)^2 > 4\lambda r^2 c\gamma\,. \tag{11}$$

Физическая интерпретация решения (5), (8) состоит в следующем. Температурное поле располагается в двух областях. Область-1 это правая полуплоскость $x \geq 0, r > 0$. Область-2 это левая полуплоскость $x \leq 0, r < 0$. Линию $x = 0$ принимаем за разрыв теплового поля, на котором действует внешний для данной среды источник энергии W. На таком разрыве должно быть выполнено динамическое условие совместности [6], являющееся следствием интегрального закона сохранения энергии:

$$W = q_x^{(1)} - q_x^{(2)},$$

где W – поверхностная плотность распределения на разрыве притока энергии; q_x – нормальная к разрыву составляющие вектора теплового потока. По мере удаления от сильного разрыва получаем $x \to \pm\infty,\quad \tau_{nst} \to 0.$

В классе решений (5), (8) компоненты вектора теплового потока $\boldsymbol{q}(q_x, q_y)$ такие

$$q_x = -\lambda\frac{\partial \tau_s}{\partial x} + q_x^{nst},\quad q_y = -\lambda\frac{\partial \tau_s}{\partial y} + q_y^{nst},$$

где q_x^{nst}, q_y^{nst} соответствуют нестационарной части решения (5) и определяются законом Максвелла (2). Отсюда получаем

$$q_x^{nst}\Big|_{x=0,\,t\to\infty} = \frac{\lambda A_1 \sin(hy)}{(\omega^2\gamma^2+1)}\left[D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)\right], \qquad (12)$$

$$D_1 = (k-\gamma r\omega)^{-1}\left[(k-\gamma r\omega)^2 + (r+\gamma k\omega)^2\right],\ D_2 = r+\gamma k\omega - B_1(k-\gamma r\omega);$$

$$q_y^{nst}\Big|_{x=0,\,t\to\infty} = -\lambda A_1 A_2 h\frac{\cos(hy)}{(\omega^2\gamma^2+1)}\sin(\omega t+\delta), \qquad (13)$$

$$A_2 = \left(C_1^2 + C_2^2\right)^{1/2}, \quad \tan\delta = C_1/C_2,\ C_1 = B_1 - \gamma\omega,\ C_2 = 1+\gamma\omega B_1.$$

Эти выражения характеризуют установившиеся во времени $(t\to\infty, \exp(-t/\gamma)\to 0)$ колебания теплового потока при $x=0$. Далее для более выразительной записи волновой части решения возьмем частное значение константы B_1, а именно: $B_1 = (r+\gamma k\omega)/(k-\gamma r\omega)$. Тогда формулы (12), (13) представляют две встречные волны:

$$q_x^{nst}\Big|_{x=0} = \frac{\lambda A_1\left[(k-\gamma r\omega)^2 + (r+\gamma k\omega)^2\right]}{2(\omega^2\gamma^2+1)(k-\gamma r\omega)}\left[\sin(hy+\omega t) + \sin(hy-\omega t)\right], \qquad (14)$$

$$q_y^{nst}\Big|_{x=0} = \frac{\lambda A_1 A_2 h}{2(\omega^2\gamma^2+1)}\left[\sin(hy-\omega t-\delta) - \sin(hy+\omega t+\delta)\right]. \qquad (15)$$

Видим, что существует сдвиг δ фазы колебаний продольного q_y^{nst} и поперечного q_x^{nst} к разрыву тепловых потоков: $\tan\delta = r/k$.

На основе оценки (11) запишем для параметра затухания r следующее выражение: $r^2 = \varepsilon^2(c-\gamma q_\upsilon^1)^2/(4\lambda c\gamma)$, где ε^2 - свободный параметр из интервала $(0,1)$. Отсюда следует, что

$$\omega^2 = \left(4\lambda^2 r^4\right)/\left[(1-\varepsilon^2)(c-\gamma q_\upsilon^1)^2\right]. \qquad (16)$$

Скорость распространения тепловых возмущений есть $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2}$. Квадраты тепловых чисел Маха, соответствующих осям x и y, равны $M_x = \upsilon_x^2/w^2$, $M_y = \upsilon_y^2/w^2$, где $\upsilon_x^2 = \omega^2/k^2$, $\upsilon_y^2 = \omega^2/h^2$. Отсюда находим, применяя (10) и (16): $M_x^2 = \varepsilon^2$, $0<\varepsilon^2<1$. Значит, вдоль оси x, ортогональной сильному разрыву, процесс «дозвуковой». На разрыве $x=0$ для стоячей волны (14), (15) получаем

$$M_y^2 = \left[\varepsilon^4(1-\bar\gamma)^2\right]/\left[4\bar\gamma(1-\varepsilon^2)\right], \qquad (17)$$

где $\bar\gamma = \gamma q_\upsilon^1/c$ - безразмерный параметр неравновесности системы «среда – источник энергии». На основе формулы (16) безразмерную частоту возбуждающих колебаний можно записать так:

$$\bar\omega = \omega\gamma,\ \bar\omega^2 = \left[\varepsilon^4(1-\bar\gamma)^2\right]/\left[4(1-\varepsilon^2)\right],$$

и тогда находим, что

$$M_y^2 = \bar\omega^2/\bar\gamma\,. \qquad (18)$$

Волновой процесс вдоль линии сильного разрыва «сверхзвуковой», если $M_y^2 > 1$:

$$\left[\varepsilon^4/(1-\varepsilon^2)\right] > \left[4\overline{\gamma}/(1-\overline{\gamma})^2\right].$$

Такая ситуация наблюдается, в частности, если $\varepsilon^2 = 1-0, \overline{\gamma} = +0$. Это означает, что вдоль оси x процесс околозвуковой: число M_x^2 находится в левой окрестности единицы, а неравновесность выражена слабо. Волновой процесс вдоль сильного разрыва дозвуковой, если $0 < M_y^2 < 1$. Это выполнено, например, если $\varepsilon^2 = +0, \overline{\gamma} = 1 \pm 0$, т.е. имеем отчетливо выраженную неравновесность системы, а число M_x^2 находится в правой окрестности нуля.

Таким образом, в данном двумерном процессе величина M_y^2, см. (17) и (18), мультипликативным образом зависит от двух факторов: 1) от характера возбуждения колебаний вдоль оси x - количественной характеристикой здесь служит дробь $\varepsilon^4/(1-\varepsilon^2)$; 2) от степени неравновесности системы, т.е. от величины $(1-\overline{\gamma})^2/\overline{\gamma}$.

Морфологические свойства поля изотерм. Типичные изображения поля изотерм для «прямоугольников» вида (6) представлены на рис. 1. Данные изотермы построены в правой полуплоскости $x \geq 0$ при $t = \pi/(2\omega)$, что соответствует одной четверти периода колебаний по времени. Важным параметром задачи является безразмерная частота внешнего теплового воздействия $\Omega = \omega c / q_\upsilon^1$; ясно, что $\Omega\overline{\gamma} = \overline{\omega}$. Основным элементом полученных периодических структур является нейтральная изотерма $\tau = 0$. Обращает на себя внимание «шахматный» порядок расположения изотерм. Динамические закономерности воздействия стоячей волны на «прямоугольники» существенным образом зависят от количественного соотношения между частотой Ω и параметром неравновесности $\overline{\gamma}$, см. рис. 1.

А) Б)

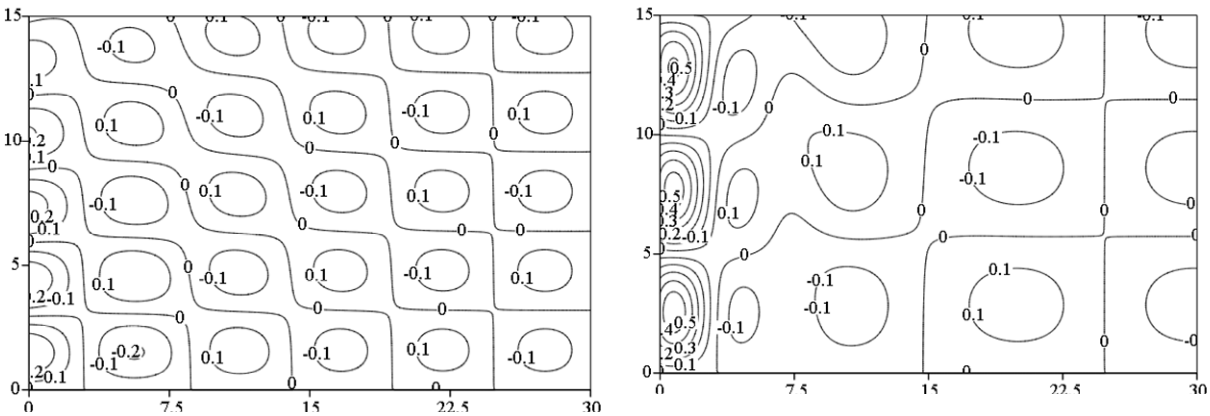

Рис. 1. Типичное промежуточное состояние [$t = \pi/(2\omega)$] линий изотерм при воздействии стоячей волны на стационарное тепловое поле

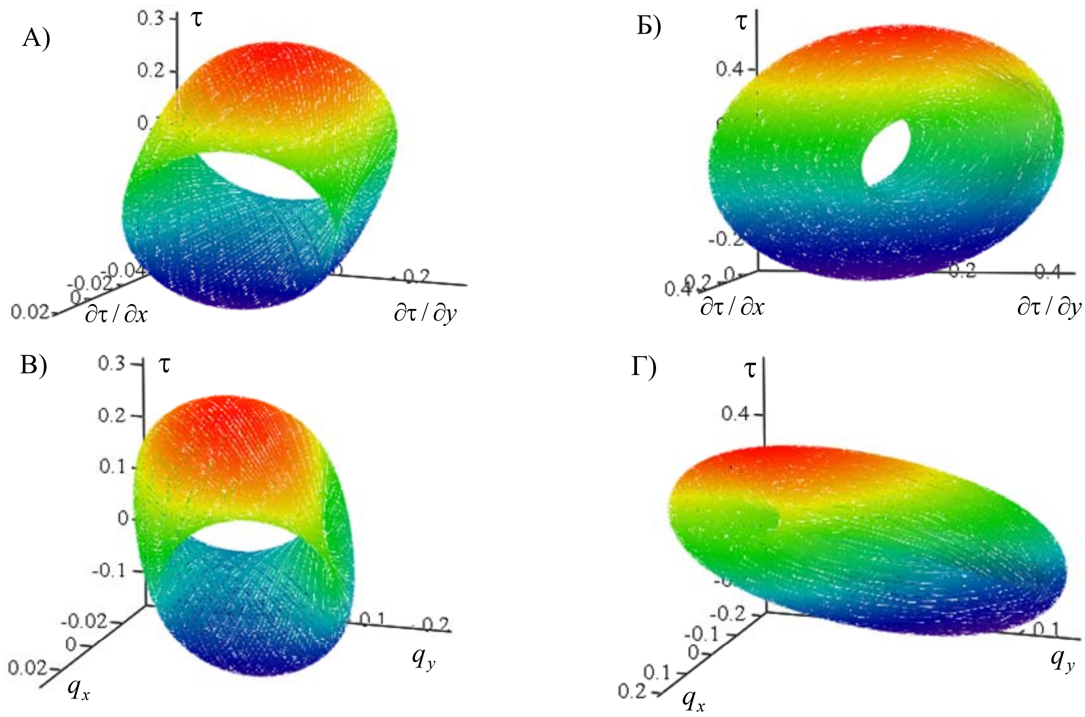

Рис. 2. Фазовый портрет теплофизической системы

На рисунках 1 и 2 левый столбец относятся к низкочастотному $(0<\Omega<1)$ воздействию, правый столбец – к высокочастотному $(\Omega>1)$. Представленные графики получены при следующих значениях входных параметров: левый столбец - $r=0{,}1425$; $\overline{\varpi}=0{,}4335$; $k=-0{,}4564$; $\Omega=0{,}3335$; $\varepsilon=0{,}95$; $\overline{\gamma}=1{,}3$; правый столбец - $r=0{,}285$; $\overline{\varpi}=0{,}8671$; $k=0{,}9127$; $\Omega=2{,}1677$; $\varepsilon=0{,}95$; $\overline{\gamma}=0{,}4$. Фазовые портреты изученных теплофизических систем построены двумя способами: 1) в пространстве «температура – градиенты температуры» $(\partial\tau/\partial x, \partial\tau/\partial y, \tau)_{x=0,\, y=y_j}$; 2) в пространстве «температура – тепловой поток» $(q_x, q_y, \tau)_{x=0,\, y=y_j}$. Индексом j отмечены значения функций при $x=0$ на волне $y_j=(\omega t)/h$, $t\geq 0$. Расчеты показали, что для этих пространств фазовые портреты обладают одинаковыми качественными свойствами. Фазовая траектория – незамкнутая линия, располагающаяся на тороидальной поверхности, если отношение частот h_1/h_2 [см. (6)] есть число иррациональное или трансцендентное.

Заключение. Изучены локально-неравновесные процессы волнового воздействия на материал, стационарное тепловое состояние которого определяется периодическими структурами типа «прямоугольники» (6) и «полосы» (7). Обнаружен мультипликативный характер взаимного влияния двух факторов: характера возбуждения колебаний и степени неравновесности системы «среда – источник энергии». Построен трехмерный фазовый портрет этой теплофизической системы.

Список литературы

1. Александров Л.Н. Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых пленок / Л.Н. Александров. — Новосибирск: Наука, 1985. — 224 с.
2. Grigoropoulos C. Explosive crystallization in the presence of melting / C. Grigoropoulos [et. al.] // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73. P. 184125-1 – 184125-15.
3. Шабловский О.Н. Формирование периодических тепловых структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок / О.Н. Шабловский, Д.Г Кроль // Тепловые процессы в технике. — 2009. — № 5. С. 178 – 182.
4. Шабловский О. Н. Неравновесные тепловые структуры в средах с источниками энергии / О.Н. Шабловский, Д.Г Кроль Гомель: ГГТУ им. П.О Сухого, — 2013. 208 с.
5. Жоу, Д., Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас – Баскес, Дж. Лебон. — Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — 528 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. — М.: Наука, 1973. — Т.1. 536 с.
7. Шабловский О.Н. Возбуждение стоячей волны в пространственно-периодическом тепловом поле / О.Н. Шабловский, Д.Г Кроль // Тепловые процессы в технике. — 2015. — № 5. С. 222 – 226.
8. Шабловский О.Н. Стоячие волны и вынужденные тепловые колебания в локально-неравновесной среде с источником энергии / О.Н. Шабловский // Вестник Московского государственного технологического университета «Станкин». — 2012. — № 3 (22). С. 115 – 119.