Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

Г. С. ЧОГОШВИЛИ

О ПОВЕРХНОСТЯХ УРОВНЯ И ОБЛАСТЯХ МЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ОГРАНИЧЕННОМ МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VII 1939)

Рассмотрим ограниченное риманово многообразие R с границей B и заданную на нем функцию f, которая индуцирует на B функцию f_b. R, B, f, f_b удовлетворяют при этом общим граничным условиям [см. ([2-4])]. Раньше ([4]) мы исследовали изменения поверхности уровня и области меньших значений при переходе через критическое значение функции f. Теперь мы выясним те же вопросы при переходе через критическое значение функции f_b.

Существуют два рода критических точек функции f_b. В критической точке первого рода производная по направлению, нормальному к B в рассматриваемой точке и идущему изнутри области, положительна; в критической точке второго рода такая производная отрицательна. Исходя из этой классификации, мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *При переходе через критическую точку первого рода функции f_b все числа Betti области меньших значений функции f не меняются. При переходе через критическую точку второго рода индекса k функции f_b все числа Betti области меньших значений функции f остаются неизменными за исключением $(k-1)$-мерного, которое (в этом случае) уменьшается на единицу, или k-мерного, которое увеличивается на единицу.*

Теорема 2. *При прохождении через критическую точку индекса k функции f_b все числа Betti поверхности уровня функции f остаются неизменными за исключением: в случае первого рода $(n-k-2)$-мерного, которое увеличивается на единицу, или $(n-k-1)$-мерного, которое уменьшается на единицу; в случае второго рода $(k-1)$-мерного, которое уменьшается на единицу, или k-мерного, которое увеличивается на единицу.*

Примечание 1. В доказательствах обеих заметок [как этой, так и ([4])] предполагается, что критическому значению (f_b или f) соответствует одна критическая точка. Но основываясь на том, что при переходе через критическую точку изменения происходят лишь в сколь угодно малой окрестности последней, можем предположить, что критическому значению соответствует любое *конечное* число критических точек. Для получения изменения чисел Betti должно алгебраически множить изменения, соответствующие каждой критической точке.

Примечание 2. Пользуясь результатами обеих заметок и суммируя изменения чисел Betti области меньших значений при возрастании значения функции от абсолютного минимума до абсолютного максимума, получим известные соотношения Morse'а, связывающие числа Betti многообразия с числами критических точек функции [см. в ([2]) теорему 10]. Из первой части теоремы 1 становится ясным отсутствие в этих соотношениях критических точек первого рода.

От данного определения рода критической точки нетрудно перейти к другому, более удобному при доказательствах: в критической точке первого рода, и следовательно в каждой точке ее достаточно малой окрестности в B, ортогональная траектория функции f выходит из многообразия R, т. е. прекращается, а в точке второго рода и соседних с ней входит, т. е. начинается (при возрастании параметра $t=f$).

Если p — критическая точка индекса k, $k \neq 0$, $n-1$ функции f_b, то в достаточно малой окрестности U этой точки в B функцию f_b можно представить, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, в виде

$$f_b = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = -p_b^2 + q_b^2.$$

Допустим сперва, что p — критическая точка первого рода.

Числа e и ε, $\varepsilon > e$, можно выбрать настолько малыми по абсолютному значению, что $E\,[f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2] \subset U$.

Прежде всего в каждой поверхности уровня $f=c$, где $c_1 \leqslant c \leqslant c_2$, причем c_1, c_2 удовлетворяют условиям $\varepsilon^2 < c_1 < 0$, $c_2 > 0$ и сегмент $[c_1, c_2]$ не содержит критических значений ни f, ни f_b ([1], мы должны создать край ширины d_c вдоль части $E\,[f_b=c,\ p_b^2 \geqslant \varepsilon^2]$ границы этой поверхности такой, чтобы дуги этого края, начинающиеся в точках $E\,[f_b=c,\ p_b^2=\varepsilon^2]$, образовывали край (той же ширины d_c) множества

$$E\,[f_b=c,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]\ ([2].$$

Для этого вдоль той части границы $f_b=c$ поверхности уровня $f=c$, где $p_b^2 \geqslant \varepsilon^2$, создадим поле дуг, являющихся пересечениями нормальных к $f_b=c$ плоскостей с $f=c$. Можно показать, что эти плоскости образуют поле в окрестности любой точки из $f_b=c$. Часть этого поля, состоящая из дуг, начинающихся в точках $E\,[f_b=c,\ \varepsilon_1^2 \geqslant p_b^2 \geqslant \varepsilon^2]$ возможно непрерывно деформировать таким образом, чтобы дуги, начинающиеся в точках $E\,[f_b=c,\ p_b^2=\varepsilon_1^2]$, оставались неподвижно, а дуги, начинающиеся в точках $E\,[f_b=c,\ p_b^2=\varepsilon^2]$, начинаясь там же, составляли бы в конце деформации поле в $E\,[f_b=c,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]$ (вдоль границы $E\,[f_b=c,\ p_b^2=\varepsilon^2]$ последнего, очевидно).

Среди положительных чисел d_c, $c_1 \leqslant c \leqslant c_2$, имеется наименьшее $d^* > 0$.

Если для всех поверхностей уровня установить вышерассмотренный край ширины d^*, то в области $c_1 \leqslant f \leqslant c_2$ вдоль той части ее границы, где $c_1 \leqslant f_b \leqslant c_2$, $p_b^2 \geqslant \varepsilon^2$, создается край из отрезков длины d^*, без пересечения покрывающих этот край. Множество концевых точек всех отрезков разбивает, очевидно, область на две части.

На поверхности уровня $f=c=0$, в ее крае, только что построенном, возьмем множество $[d]$, состоящее из точек, выбранных по одной точке на каждой дуге, а именно точек, удаленных от своего начала на расстояние d, $0 \quad d < d^*$, отсчитываемого по дуге. $[d]$ удалено на положительное расстояние как от множества всех концевых точек дуг, так и

([1] За исключением критического значения 0, соответствующего точке p для функций f_b.

([2] Для тех точек, для которых утверждение $p_b^2 \leqslant \varepsilon^2$ не имеет смысла, т. е. которые $\not\subset U$, это условие считается выполненным.

от множества $B-E[p_b^2<\varepsilon^2]$. Так как оба эти множества компактны, то ортогональные траектории $\{d\}$ к поверхности уровня, исходящие из точек $[d]$, могут быть продолжаемы на достаточно малое расстояние в обоих направлениях так, чтобы ни одна из них не выходила из построенного края в точках упомянутых множеств, т. е. не пересекалась бы ни с $B-E[p_b^2<\varepsilon^2]$, ни с концевыми точками. Продолженные на достаточно короткое расстояние по убывающим $t=f$ эти траектории не будут вообще выходить из B (т. е. не будут выходить даже в точках $p_b^2<\varepsilon^2$), ибо выходить по убывающим t означает входить по возрастающим t, чего, по условию, не может быть. В этом направлении они следовательно достигают нижней поверхности уровня. Продолженные по возрастающим t некоторые из них могут выходить; выходить, конечно, они могут лишь на край множества $p_b^2\leqslant\varepsilon^2$; при этом некоторые траектории могут выродиться в точки. $(n-1)$-мерное многообразие $\{d\}$, если оно продолжено (в обоих направлениях) достаточно мало, ни одной дугой нашего поля не пересекается более одного раза. Доказательство этого основывается на том, что любая дуга, лежащая на поверхности уровня, достаточно близкой к $f=c$, составляет с $\{d\}$ угол, сколь угодно близкий к прямому.

e^2 возьмем теперь настолько малым, чтобы траектории $\{d\}$ от $-e^2$ до e^2 удовлетворяли всем вышеотмеченным ограничениям. В направлении убывающего t траектории $\{d\}$ могут не разделять область, ибо траектории, исходящие из точек $[d]$, лежащих на $f_b=0$, могут войти внутрь области. Возьмем в этом случае множество концевых точек этих последних траекторий. Оно представит границу пересечения $\{d\}$ с $f=-e^2$. Продолжим это пересечение гладко через эту границу до границы $f=-e^2$ посредством некоторого $(n-2)$-мерного многообразия, лежащего в построенном крае дуг поверхности уровня $f=-e^2$ и составляющего с дугами углы, бо́льшие определенного $\beta>0$. Выпустим из этого добавочного многообразия ортогональные траектории в направлении возрастающего t. Они гладко примкнут к $\{d\}$, протекут внутри построенного края и выйдут из области, не доходя до $f=0$ (ибо в противном случае они пересекались бы дугами более одного раза).

Построенные траектории отделяют определенную внешнюю часть от рассматриваемой области, так как составленное ими многообразие $\{d\}$ ($\{d\}$ обозначает теперь и далее все траектории, как исходящее из $[d]$, так и добавленные к ним) имеет границу, лежащую на границе области.

Возьмем произвольную внутреннюю точку $-e^2\leqslant f\leqslant e^2$, т. е. точку, не лежащую между $\{d\}$ и B. Эта точка не может быть критической точкой f, ибо таковой нет в области $-e^2\leqslant f\leqslant e^2$. Следовательно через нее проходит ортогональная траектория, которая, продолженная по убывающему t, должна дойти до внутренней точки $f=-e^2$, ибо выходить из этой области при убывающем t она может лишь в точке $f=-e^2$ (ни $\{d\}$, ни $p_b^2\leqslant\varepsilon^2$, ни $f=e^2$ она не может пересечь при убывании t); продолженная по возрастающему t эта траектория или доходит до $f=e^2$ (до ее внутренней точки) или до этого (может быть в самом начале, если взятая точка лежит на $p_b^2\leqslant\varepsilon^2$) она выходит из области в точке множества $p_b^2\leqslant\varepsilon^2$ (тоже во внутренней точке последнего). Продолжаемость следует из отсутствия критических точек f в этой области. Возьмем теперь произвольную точку внешней части. Она лежит на определенной дуге своей поверхности уровня и делит ее в определенном отношении l. В конце этой дуги проходит траектория из $\{d\}$. Рассмотрим все дуги нашей области $-e^2\leqslant f\leqslant e^2$, оканчивающиеся в точках рассматриваемой траектории. Совокупность точек, делящих их в отношении l, образует линию, начинающуюся во внешней части $f = -e^2$ и кончающуюся в такой же части $f = e^2$ или $p_b^2 \leqslant \varepsilon^2$. Следовательно внешняя часть области заполнена l-линиями.

Таким образом, в области $-e^2 \leqslant f \leqslant e^2$ создано поле линий, начинающихся в точках поверхности $f = -e_2$ и кончающихся в точках многообразия $E[f = e^2] + E[-e^2 \leqslant f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]$.

При e_0, достаточно близком к e, область $-e^2{}_0 \leqslant f \leqslant e^2$ сможем заполнить [тут уже точно так же, как в ([4])] линиями, которые продолжат вниз предыдущие. Раз это достигнуто, то известным способом [отображение точки на точку той же линии, делящую новую дугу линии в том же отношении, в каком исходная делила старую, см. ([2,4])] устанавливаем следующие гомеоморфизмы.

11. Докритическая область меньших значений $f \leqslant -e^2$ гомеоморфна послекритической области $f \leqslant e^2$.

12. Докритическая поверхность уровня $f = -e^2$ гомеоморфна послекритической поверхности $f = e^2$ плюс многообразие $E[-e^2 \leqslant f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]$. Аналогичное рассмотрение случая критической точки второго рода покажет следующее.

21. Докритическая область меньших значений $f \leqslant -e^2$ гомеоморфна послекритической области $f \leqslant e^2$, если из последней вычесть множество точек, лежащих на линиях (ортогональных траекториях и l-линиях), начинающихся в точках множества $E[-e^2 < f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 = \varepsilon^2]$.

22. Послекритическая поверхность уровня $f = e^2$ гомеоморфна докритической поверхности $f = -e^2$ плюс многообразие $E[-e^2 \leqslant f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]$.

Из установленной таким образом топологической сущности изменения поверхности уровня соответственно области меньших значений здесь мы выведем изменения соотвествующих чисел Betti. Первая часть теоремы 1 непосредственно следует из 11. Для получения второй части нужно узнать, как влияет на числа Betti упомянутое в 21 вычитание ([1].

Множество $D = E[-e^2 \leqslant f_b \leqslant e^2,\ p_b^2 \leqslant \varepsilon^2]$ топологически можно отобразить на множество $E[p_b^2 \leqslant \varepsilon^2, q_b^2 \leqslant \varepsilon^2 - e^2]$ так, чтобы точки D, принадлежащие поверхности $f = -e^2$, отображались на множество $E[p_b^2 = \varepsilon^2,\ q_b^2 = \varepsilon^2 - e^2]$.

Множество D, есть, следовательно, $(n-1)$-мерная клетка, а множество, которое получается восстановлением в точках D вышерассмотренных l-линий и ортогональных траекторий, топологически эквивалентно с произведением D на одномерную клетку. Обозначим это множество через $\overline{D}$. D можно представить в виде топологического произведения k-мерного шара $\overline{a}_k$ (с границей S_{k-1}) на $(n-k-1)$-мерный шар b_{n-k-1} (с границей S_{n-k-2}). При этом произведении та часть D, которая принадлежит к $f = -e^2$, т. е. пересечение $D \cdot [f = -e^2]$, выражается как произведение сферы S_{k-1} на шар $\overline{b}_{n-k-1}$; дополняющая же предыдущую часть дается как произведение внутренности шара a_k на полный шар $\overline{b}_{n-k-1}$. Следовательно $\overline{D}$ может быть задано как произведение $\overline{a}_k$ на $(n-k)$-мерный шар $\overline{b}_{n-k}$ (с границей S_{n-k-1}), который представляет собой произведение шара $\overline{b}_{n-k-1}$, с 1-мерным шаром. Из предыдущего и из того, что множеству $f \leqslant -e^2$ (т. е. множеству, состоящему из точек, принадлежащих линиям, исходящим из точек по-

([1] Все линии, подлежащие вычитанию, можем предположить имеющими длину > 0, ибо построением края области $-e^2 \leqslant f \leqslant e_0^2$, $e_0^2 > e^2$, т. е. рассмотрением уже области $f \leqslant e_0^2$ этого достигнем.

верхности $f=-e^2$) могут принадлежать те и только те точки $\overline{D}$, которые лежат на линиях, основания которых суть точки множества $f_b=-e^2$, заключаем, что общая часть $\overline{D}\cdot f\leqslant -e^2$ есть произведение сферы S_{k-1} на шар $\overline{b}_{n-k}$; остальная же часть представляется как произведение a_k на $\overline{b}_{n-k}$.

Известный анализ этого обстоятельства [ср. ([1], [4])] приводит ко второй части теоремы 1.

Этим же путем из 12 и 22 получим теорему 2. Если первая часть этой теоремы получена, то вторую часть легче получить, заметив, что изменение чисел Betti поверхности уровня функции f при переходе через критическую точку второго рода и индекса k лишь знаком отличается от изменения чисел Betti поверхности уровня функции $-f$ при переходе через критическую точку первого рода и индекса ${}_{n-k-1}$, так что эта часть теоремы сводится к первой.

Остается рассмотреть случаи $k=0$ и $k=n-1$. Отметим, что точка минимума функции f_b $(k=0)$ есть точка первого рода, а точка максимума $(k=n-1)$ точка второго рода. Мы предположим, что при $k=0$, f не имеет минимума, а при $k=n-1$, оно не имеет максимума и не только относительных, но и абсолютных.

Возьмем такую окрестность U точки p в R, которая индуцирует в B окрестность, где имеет место известное представление f_b. Из этого представления усматриваем, что в случае $k=n-1: E[-e^2\leqslant f_b^2\leqslant \leqslant e^2]\cdot U$ есть $(n-1)$-мерный шар. Ранее рассмотренным способом область $-e^2\leqslant f\leqslant e^2$ при достаточно малом e (в частности таком, чтобы $f=-e^2$ и $f=e^2$ пересекались с U) можно заполнить l-линиями и ортогональными траекториями, исходящими в случае $k=0$ из $f=-e^2$ и в случае $k=n-1$ из $E[f=-e^2]+E[-e^2\leqslant f_b\leqslant e^2]\cdot U$. При $k=0$, $f\leqslant -e^2$ и $f\leqslant e^2$ будут следовательно гомеоморфными. При $k=n-1$, $f\leqslant -e^2$ получается из $f\leqslant e^2$, топологически, удалением внутренности и оснований (но оставлением боковой поверхности) полного n-мерного цилиндра. Поверхность же уровня $f=-e^2$ получается из $f=e^2$ удалением внутренности одной $(n-1)$-мерной клетки при $k=n-1$, и натягиванием таковой при $k=0$. Отсюда заключаем об изменениях чисел Betti в этих случаях.

Институт математики
Московского государственного университета

Поступило
1 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Morse, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 345—396 (1925). [2] M. Morse a. G. B. Van-Schaack, Ann. of Math., 35, 545—571 (1934). [3] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, N.-Y. (1934). [4] Г. Чогошвили, ДАН, XXII, № 6 (1939).