

ВОЗБУЖДЕНИЕ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОМ ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается двумерная плоская теплофизическая система «среда – источник энергии», которая в начальном состоянии стационарна и обладает периодической неоднородностью по координатам. На эту систему воздействует стоячая волна, возбуждаемая внешним для данной среды источником энергии. Изучены морфологические свойства периодических тепловых структур, построен трехмерный фазовый портрет этой теплофизической системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теплофизические аспекты проблемы формирования периодических структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок [1, 2] рассмотрены в работах [3, 4]. Установлено, что в среде, обладающей локально-неравновесными свойствами, пространственно-периодические структуры (полосы, ячейки, решетки и др.) образуются под влиянием конкуренции между температурными областями с тепловыделением и теплоотдачей. Примером такой конкуренции является выделение кристаллизационного тепла на фазовой границе и теплоотдача в подложку, на которую напылена аморфная пленка. Важным параметром процесса служит температура $T = T_0$ при которой тепловыделение и теплоотдача уравниваются, т.е. взрывная кристаллизация прекращается. В данной работе рассматриваются свойства динамического внешнего воздействия на уже сформировавшиеся тепловые структуры. Суть изучаемой задачи состоит в следующем.

Теплофизическая система «среда – источник энергии» находится в пострелаксационном (стационарном) состоянии. Это состояние характеризуется двумерным плоским температурным полем, периодическим по координатам x, y . На линии разрыва $x = 0$ внешний по отношению к среде источник энергии W возбуждает стоячую волну. Цели исследования: 1) проанализировать закономерности воздействия стоячей волны на пространственно-периодическое тепловое поле; 2) изучить морфологические свойства нейтральной изотермы.

Для исследования нестационарных температурных полей применяем хорошо известное уравнение теплопроводности с источником энергии:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v, \quad (1)$$

$$q_v = q_v^1 (T - T_0), q_v^1 > 0,$$

$$\lambda, c, q_v^1, T_0 - \text{const.}$$

Производство энтропии подсчитываем по формулам [5, 6]:

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_e, \quad (2)$$

$$\sigma_i = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) / (\lambda T^2), \sigma_e = q_v / T,$$

где σ_i — производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов; σ_e — производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; вектор удельного теплового потока \mathbf{q} имеет компоненты $q_x = -\lambda \partial T / \partial x$, $q_y = -\lambda \partial T / \partial y$. Принцип минимума производства энтропии в стационарных состояниях (принцип Пригожина) выражается неравенством [7]: $\sigma_{\text{stab}} \leq \sigma_{\text{instab}}$, где левая / правая части неравенства соответствуют производству энтропии в устойчивом / неустойчивом состояниях. Для неравновесного перехода термодинамической системы из старого в новое состояние этот принцип означает следующее: новому устойчивому состоянию отвечает меньшее значение производства энтропии, чем производство энтропии старого, но продолженного в неустойчивую область состояния системы. Подробное изложение этого вопроса и библиография проблемы даны в [7].

Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \lambda', c \rightarrow \bar{c} c', q_v \rightarrow \bar{q}_v q'_v, T \rightarrow T', \sigma \rightarrow \sigma',$$

$$q_x \rightarrow q'_x, q_y \rightarrow q'_y, t \rightarrow t', x \rightarrow x', y \rightarrow y',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины.

Безразмерные комплексы

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b}, \quad \bar{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b}, \quad \bar{q}_v = (q_v)_b \frac{x_b}{q_b}$$

составлены из масштабов величин (они отмечены индексом b), применяемых для обезразмеривания: $c = c' c_b$, $\lambda = \lambda' \lambda_b$, $T = T' T_b$, $\sigma = \sigma' \sigma_b$, $q_x = q'_x q_b$, $q_y = q'_y q_b$, $q_v = q'_v (q_v)_b$, $x = x' x_b$, $y = y' y_b$, $t = t' t_b$, $q_b = \lambda_b T_b / x_b$, $(q_v)_b = \lambda_b T_b / x_b^2$, $\sigma_b = q_b^2 / (\lambda_b T_b^2)$. Все вычисления выполнены в безразмерных переменных при $\bar{\lambda} = 1$, $\bar{c} = 1$, $\bar{q}_v = 1$, $\lambda' = 1$, $c' = 1$. Далее штрих над безразмерными величинами не пишем.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И СТОЯЧАЯ ВОЛНА

Решение уравнения теплопроводности (1) представим в виде

$$\tau(x, y, t) = \tau_s(x, y) + \theta(x, y, t), \quad (3)$$

где $\tau = T - T_0$ — отклонения температуры от ее нейтрального значения; $q_0(T = T_0) = 0$. Для стационарной температуры $\tau_s(x, y)$ рассмотрим случай, когда нейтральная изотерма $\tau_s = 0$ представляет собой решетку, т.е. семейство прямоугольников:

$$\tau_s(x, y) = D \cos(h_1 x) \sin(h_2 y), \quad (4)$$

$$h_1^2 + h_2^2 = q_0^1 / \lambda; \quad h_1, h_2, D - \text{const.}$$

Эти прямоугольники образованы линиями $h_1 x = 2\pi n_0 \pm \pm(\pi/2)$, $h_2 y + \beta = \pi n_0$, где $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — любое целое число. Очевидно, что в частном случае $h_1 = 0$ решение (4) дает зависимость

$$\tau_s(x, y) = D \sin(h_2 y), \quad (5)$$

и нейтральная изотерма образует семейство полос $h_2 y = \pi n_0$. Полосчатую структуру (5) рассматриваем как отдельный вариант, потому что он важен в практическом отношении и заключает в себе многие существенные свойства изучаемого процесса.

Еще одним примером стационарной периодической структуры являются ячейки треугольного вида:

$$\tau_s(x, y) = 2A_3 \sin(y) [\cos(y) - \cos(x\sqrt{3})], \quad q_0^1 / \lambda = 4. \quad (6)$$

Здесь $\tau_s = 0$ вдоль линий $y = \pi n_0$, $x\sqrt{3} \pm y = \pi n_0$.

Обсудим экстремальные свойства производства энтропии для стационарных состояний (4) – (6). В случае полосчатой структуры (5) зависимость $\sigma = \sigma(\tau)$ имеет максимум $\sigma = \sigma_{\max}$ при

$$\tau_* / D = (1/\sqrt{\Delta}) - 2\sqrt{\Delta}, \quad \text{если } (1/4) < \Delta < 1,$$

где $\Delta = D^2 / T_0^2$, и при этом выполнено неравенство

$$\tau_*^2 / D^2 < 1. \quad \text{Константа } D \text{ есть амплитуда стационарных колебаний температуры (5) по отношению к координате } y. \text{ Значения } \sigma = \sigma_{\max} \text{ — это верхняя граница производства энтропии для устойчивых температурных «полос». Для периодической структуры (4), состоящей из прямоугольников, рассмотрим производство энтропии на отдельных линиях. Вдоль тех линий, где } \cos(h_1 x) = \pm 1, \text{ имеем } \tau_s = \pm D \sin(h_2 y), \text{ и формула для подсчета } \sigma \text{ [см. (2)] такая же, как для полос. Условие существования } \sigma = \sigma_{\max} \text{ имеет прежний вид. Для линий, вдоль которых } \sin(h_2 y) = \pm 1, \text{ имеем } \tau_s = \pm D \cos(h_1 x). \text{ После переобозначения } h_1 \leftrightarrow h_2 \text{ запись итоговых выражений сохраняется, и вывод о существовании } \sigma = \sigma_{\max} \text{ остается в силе.}$$

Для треугольных ячеек (6) производство энтропии изучаем на линиях, где $\sin y = \pm 1$. Оказывается, что $\sigma = \sigma_{\max}$ достигается при $\tau_* / A_3 = 2(1 - 8\Delta_3) / \sqrt{\Delta_3}$, $\Delta_3 = A_3^2 / T_0^2$. Этот максимум существует для двух вариантов: 1) в «горячей» области $\tau_* > 0$, если $(1/16) < \Delta_3 < (1/8)$; 2) в «холодной» области $\tau_* < 0$, если $(1/8) < \Delta_3 < (3/16)$.

Нестационарная часть решения (3) имеет вид:

$$\theta(x, y, t) = A_1 \exp(-rx) \sin(\omega t - rx) \sin(hy), \quad (7)$$

$$h^2 = q_0^1 / \lambda, \quad r = (\omega/2a)^{1/2}, \quad a = \lambda/c,$$

где A_1, ω — произвольные постоянные. Для теплофизического истолкования решения (3), (7) рассматриваем температурное поле на плоскости (x, y) в двух областях. Область - 1 это правая полуплоскость $x \geq 0, r > 0$. Область - 2 это левая полуплоскость $x \leq 0, r < 0$. Ясно, что $\theta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Линии $x = 0$ принимаем за разрыв теплового поля, на котором действует внешний для данной среды источник энергии W . На таком разрыве должно быть выполнено динамическое условие совместности [6], являющееся следствием интегрального закона сохранения энергии:

$$W = q_x^{(1)} - q_x^{(2)},$$

где W — поверхностная плотность распределения на разрыве притока энергии; q_x — нормальная к разрыву направляющая вектора теплового потока. Учитывая формулы (4) – (7) получаем, что источник, возбуждающий стоячую волну при $x = 0$, имеет вид

$$W(y, t) = A_1 \lambda r \sqrt{2} \left[\sin\left(hy + \omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(hy - \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Эта стоячая волна образована двумя встречными волнами $hy = \pm \omega t \mp (\pi/4)$; h — волновое число, $V_y = \omega/h$ — фазовая скорость волны. Еще две характерные скорости $V_x = \omega/r$ и $V_T = (a\omega)^{1/2}$ связаны между собой соотношением $V_x^2 = 2V_T^2$.

Безразмерная частота возбуждающих колебаний равна

$$\Omega = \omega c / q_0^1 = V_y^2 / V_T^2.$$

Далее для определенности применяем термины «низкая» частота [$0 < \Omega \leq 1$] и «высокая» частота [$\Omega > 1$]. Количественные данные об интенсивности теплообмена получаем с помощью нестационарных аналогов критерия Нуссельта

$$\text{Nu}_1 = \left(\frac{q_x}{\lambda Tr} \right)_j, \quad \text{Nu}_2 = \left(\frac{q_y}{\lambda Th} \right)_j,$$

которые подсчитываем при $x = 0$ на фронте волны $y_j = [\omega t - (\pi/4)]/h$. Параметр нестационарности процесса и производство энтропии на волне равны соответственно

$$\mathfrak{S} = \left[\left(\frac{\partial \tau / \partial t}{Th^2 a} \right)_{x=0} \right]_j, \quad \sigma_j = [\sigma(x=0)]_j.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Типичные изображения линий изотерм для «полос», «прямоугольников» и «треугольников» представлены на рис.1. Данные изотермы построены в правой полуплоскости $x \geq 0$ при $t = \pi/(2\omega)$, что соответствует одной четверти периода колебаний по времени. В случае «полос» имеем перемежаемость изотерм, вдоль которых $\tau > 0$ и $\tau < 0$. Для «прямоугольников» и «треугольников» наблюдается «шахматный» порядок расположения изотерм. Основным элементом всех этих периодических структур является нейтральная изотерма $\tau = 0$. Возбуждающая стоячая волна изменяет морфологические свойства исходных (стационарных) изотерм. Эти изменения локализованы в конечной окрестности разрыва $x = 0$ и в ходе колебаний формируется режим пульсаций, при котором деформированные линии отдельных изотерм сближаются / удаляются друг от друга. Характер деформирования нейтральной изотермы полностью зависит от структуры исходного стационарного температурного поля. Хорошо видно, что в случае «полос» наиболее отчетливо выражены деформации изотерм, располагаю-

щихся в средней части каждой полосы. Для «прямоугольников» и «треугольников» режим пульсаций проявляется прежде всего вблизи нейтральной изотермы, примыкающей к разрыву $x = 0$, рис. 1 б, в. На рис. 2 представлены примеры колебаний основных параметров процесса. В данном классе решений критерии Нуссельта как функции времени не зависят от Ω : при прочих равных условиях для «низких» и «высоких» частот имеем одинаковые значения Nu_1 и одинаковые значения Nu_2 . Вместе с тем параметр нестационарности $\vartheta(t)$ и производство энтропии $\sigma_j(t)$ чувствительно реагируют на изменение Ω , рис. 2. Отметим, в частности, что $\vartheta \sim \Omega$. Амплитуда колебаний нестационарной части нормального к разрыву теплового потока зависит от частоты возбуждающих колебаний $\omega \sim r^2$ по закону $A(r) = r \exp(rx)$. Значит, корреляция «частота – амплитуда» имеет типичный колокообразный вид: при $x = x_1 = 1/r$ функция $A(r)$ достигает максимума. При больших ω этот максимум находится в малой окрестности разрыва $x = 0$.

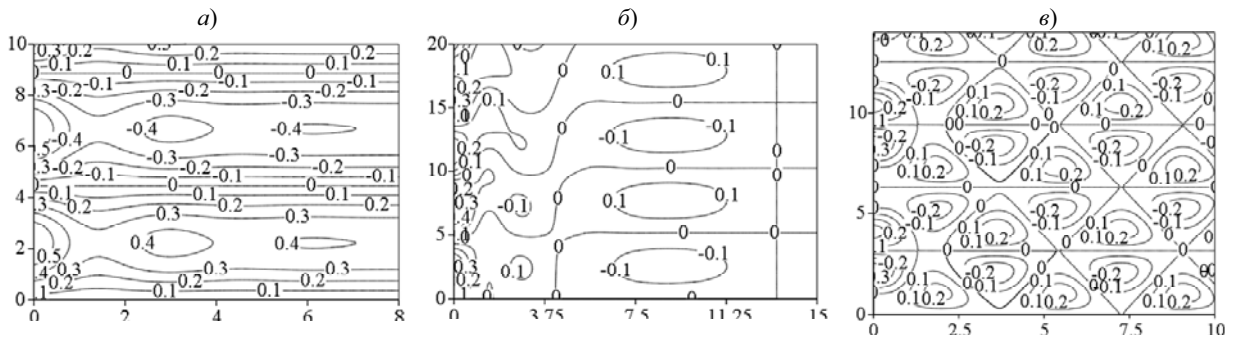


Рис. 1. Типичное промежуточное $t = \pi/(2\omega)$ состояние линий изотерм при воздействии стоячей волны на стационарное тепловое поле: а – «полосы»; б – «прямоугольники», в – «треугольники»

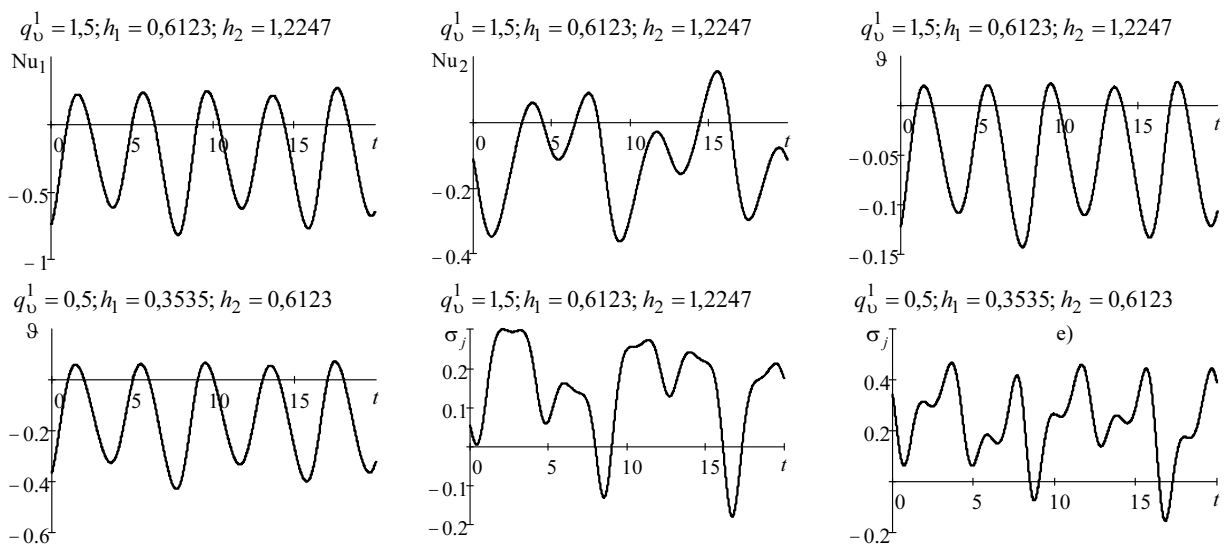


Рис. 2. Примеры колебаний по времени основных параметров процесса при $A_1 = 0,3; D = 0,15; \omega = \pi/4$.

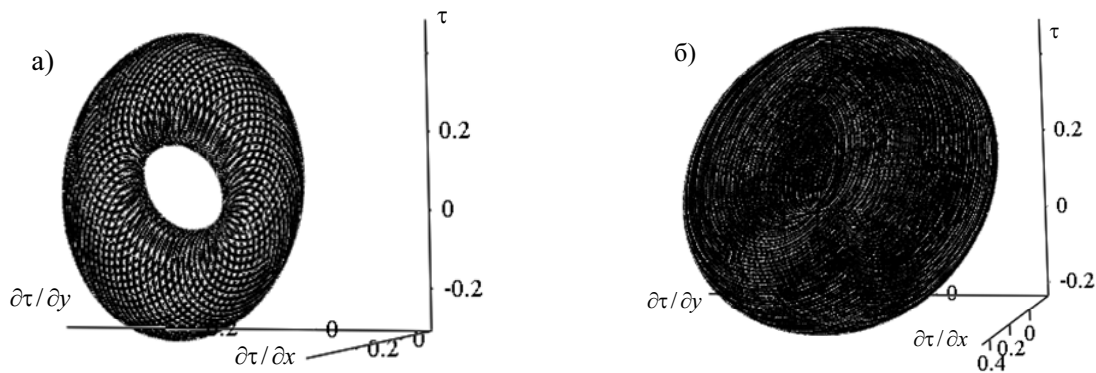


Рис. 3. Фазовый портрет теплофизической системы для варианта «прямоугольник»: *a* – тороидальная область, в которой расположены фазовые траектории при $h_1/h_2 = 9/\sqrt{19}$; *б* – трехмерный диск, имеющий впадину при $h_1/h_2 = 1/\sqrt{3}$

Для иллюстрации градиентных свойств температурных полей был построен фазовый портрет изучаемой теплофизической системы в трехмерном пространстве $\{(\partial\tau/\partial y)_j, (\partial\tau/\partial x)_j, \tau_j\}, t \geq 0, x = 0$.

Наиболее выразительно свойства фазовых траекторий проявляются в случае «прямоугольников», когда отношение частот h_1/h_2 [см. (4)] есть число иррациональное либо трансцендентное. В этих условиях фазовая траектория – незамкнутая линия, располагающаяся на тороидальной поверхности, рис. 3, *a*. Возможны варианты, когда тор не имеет отверстия, и на трехмерном диске наблюдается впадина, рис. 3, *б*. Замкнутая фазовая траектория получается для «прямоугольников», если h_1/h_2 — рациональное число, а также для «полос» и «треугольников».

Предметом наших дальнейших исследований является возбуждение стоячей волны в материале с «тепловой памятью». Для локально-неравновесной среды в работе [8] изучены тепловые режимы, при которых существуют стоячие волны температуры и теплового потока.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о воздействии стоячей волны на двумерное стационарное температурное поле, обладающее периодической неоднородностью по координатам. Рассмотрены три случая, для которых основными элементами периодической структуры служат линии нейтральной изотермы, образующие «полосы», «прямоугольники», «треугольники». Обнаружен режим пульсаций изотерм в конечной окрестности разрыва $x = 0$, вдоль которого действует стоячая волна. Установлены качественные и количественные свойства нестационарных аналогов критериев Нуссельта, соответствующих продольной (вдоль разрыва) и поперечной (ортогональной разрыву) компонентам вектора теплового потока. Показано, что фазовые траектории данной теплофизической системы расположены в тороидальной области пространства $\{(\partial\tau/\partial y)_j, (\partial\tau/\partial x)_j, \tau_j\}, t \geq 0, x = 0$.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- T — температура, К;
- $q(q_x, q_y)$ — удельный тепловой поток, Вт/м²;
- c — объемная теплоемкость, Дж/(м³ · град);
- λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · град);
- x, y — прямоугольные декартовы координаты, м;
- t — время, с;
- q_0 — мощность внутренних источников тепла, Вт/(м³);
- σ — производство энтропии, Вт/(м³ · град).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Л.Н. Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых пленок. Новосибирск: Наука, 1985. 224 с.
2. Grigoropoulos C., Rogers M., Ko S.H., Golovin A.A., Matkowsky B.J. Explosive crystallization in the presence of melting // Physical Review B. 2006. Vol. 73. P. 184125-1 – 184125-15.
3. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Формирование периодических тепловых структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок // Тепловые процессы в технике. 2009. № 5. С. 178–182.
4. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Неравновесные тепловые структуры в средах с источниками энергии. Гомель: ГГТУ им. П.О Сухого, 2013. 208 с.
5. Жоу Д., Касас – Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006. 528 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т.1. 536 с.
7. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Ком Книга, 2007. 328 с.
8. Шабловский О.Н. Стоячие волны и вынужденные тепловые колебания в локально-неравновесной среде с источником энергии // Вестник Московского государственного технологического университета «Станкин». 2012. № 3 (22). С. 115–119.