Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. И. ЛУРЬЕ и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО-СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 6 V 1939)

В этой работе дается вывод уравнений теории упругости в форме, удобной для решения задач, связанных с рассмотрением «естественно-скрученного» стержня. Так мы называем стержень, ограниченный поверхностью, образованной движением плоской фигуры, вращающейся с постоянной угловой скоростью r, тогда как центр тяжести ее движется вдоль оси, перпендикулярной плоскости фигуры, со скоростью, равной 1. В плоскости фигуры введем систему осей x_1, x_2, имеющих начало в центре тяжести фигуры и направленных по главным осям инерции. Неподвижные декартовы оси x, y, z выбраны так, что в начальном положении фигуры x_1 и x_2 совпадают с x и y, а ось z (она же ось x_3) перпендикулярна плоскости фигуры. Три числа x_1, x_2, x_3 представляют криволинейные координаты, связанные с декартовыми координатами соотношениями:

$$x_1 = x\cos rz + y\sin rz; \quad x_2 = -x\sin rz + y\cos rz; \quad x_3 = z \tag{1}$$

и обратно

$$x = x_1\cos rx_3 - x_2\sin rx_3; \quad y = x_1\sin rx_3 + x_2\cos rx_3; \quad z = x_3. \tag{2}$$

Уравнение боковой поверхности стержня получим, полагая в (2)

$$x_1 = x_1(s); \quad x_2 = x_2(s), \tag{3}$$

где (3) являются параметрическими уравнениями контура (s — длина дуги контура).

Под x_1, x_2, x_3 мы в отличие от общепринятых обозначений тензорного анализа понимаем контравариантные составляющие радиус-вектора. В остальном приняты обычные обозначения тензорного анализа.

Выписываем основные величины, относящиеся к рассматриваемой (не ортогональной) криволинейной системе:

а) ковариантные составляющие метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1; \quad g_{12} = 0; \quad g_{13} = -x_2 r; \\ & \qquad\quad\;\; g_{22} = 1; \quad g_{23} = x_1 r; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad g_{33} = 1 + (x_1^2 + x_2^2)\, r^2; \end{aligned}$$

b) его контравариантные составляющие:

$$g^{11}=1+x_2^2r^2;\quad g^{12}=-x_1x_2r^2;\quad g^{13}=x_2r;$$
$$g^{22}=1+x_1^2r^2;\quad g^{23}=-x_1r;$$
$$g^{33}=1;$$

c) отличные от нуля прямые и волнистые скобки Кристоффеля:

$$[33.1]=-x_1r^2;\quad [33.2]=-x_2r^2;\quad [23.1]=-r,\quad [13.2]=r;$$
$$[13.3]=x_1r^2;\quad [23.3]=x_2r^2;$$
$$\left\{ {1 \atop 33} \right\}=-x_1r^2;\quad \left\{ {2 \atop 33} \right\}=-x_2r^2;\quad \left\{ {2 \atop 1\;3} \right\}=r;\quad \left\{ {1 \atop 2\;3} \right\}=-r.$$

Уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии объемных сил, как известно, имеют вид ([1]): в объеме —

$$\frac{\partial\sigma^{rs}}{\partial x_s}+\sigma^{mn}\left\{ {r \atop m\;\;n} \right\}=0,\quad \sigma^{rs}=\sigma^{sr}; \tag{4}$$

на боковой (свободной) поверхности —

$$\sigma^{rs}n_s=0. \tag{5}$$

Здесь и всюду в дальнейшем σ^{rs} обозначают контравариантные составляющие тензора напряжений, а n_s — ковариантные составляющие нормали к боковой поверхности.

Вычисление дает:

$$n_1=\frac{1}{\delta}\nu_1,\quad n_2=\frac{1}{\delta}\nu_2,\quad n_3=0, \tag{6}$$

где

$$\delta^2=1+r^2\left(x_1\frac{dx_1}{ds}+x_2\frac{dx_2}{ds}\right)^2,$$

тогда как

$$\nu_1=\frac{dx_2}{ds},\quad \nu_2=-\frac{dx_1}{ds} \tag{7}$$

представляют проекции нормали к контуру фигуры на оси x_1, x_2. В силу этого уравнения (5) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{11}\nu_1+\sigma^{12}\nu_2=0\\ \sigma^{21}\nu_1+\sigma^{22}\nu_2=0\\ \sigma^{31}\nu_1+\sigma^{32}\nu_2=0\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

а уравнения (4) в нашем случае будут:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x_3}-x_1r^2\sigma^{33}-2\sigma^{23}r=0\\ &\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x_3}-x_2r^2\sigma^{33}+2\sigma^{13}r=0\\ &\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Уравнения, выражающие обобщенный закон Гука в произвольной координатной системе, имеют вид ([1]):

$$\sigma^{rs}=\lambda\vartheta g^{rs}+\mu\left(g^{sk}\frac{\partial u^r}{\partial x_k}+g^{rk}\frac{\partial u^s}{\partial x_k}-\frac{\partial g^{rs}}{\partial x_k}u^k\right), \tag{10}$$

где u^k — контравариантные составляющие вектора смещения, λ и μ — постоянные Ляме,

$$\vartheta=\frac{\partial u^r}{\partial x_r}+\left\{ {r \atop r\;\;t} \right\}u^t.$$

В нашем случае закон Гука приводится к виду:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma^{11}=\lambda\vartheta\,(1+x_2^2r^2)+2\mu\left[(1+x_2^2r^2)\frac{\partial u^1}{\partial x_1}-x_1x_2r^2\frac{\partial u^1}{\partial x_2}+x_2r\frac{\partial u^1}{\partial x_3}-x_2r^2u^2\right],\\
&\sigma^{22}=\lambda\vartheta\,(1+x_1^2r^2)+\\
&\quad+2\mu\left[-x_1x_2r^2\frac{\partial u^2}{\partial x_1}+(1+x_1^2r^2)\frac{\partial u^2}{\partial x_2}-x_1r\frac{\partial u^2}{\partial x_3}-x_1r^2u^1\right],\\
&\sigma^{33}=\lambda\vartheta+2\mu\left(x_2r\frac{\partial u^3}{\partial x_1}-x_1r\frac{\partial u^3}{\partial x_2}+\frac{\partial u^3}{\partial x_3}\right),\\
&\sigma^{12}=-\lambda\vartheta x_1x_2r^2+\mu\left[-x_1x_2r^2\frac{\partial u^2}{\partial x_2}+(1+x_1^2r^2)\frac{\partial u^1}{\partial x_2}-x_1r\frac{\partial u^1}{\partial x_3}+\right.\\
&\quad\left.+(1+x_2^2r^2)\frac{\partial u^2}{\partial x_1}-x_1x_2r^2\frac{\partial u^2}{\partial x_2}+x_2r\frac{\partial u^2}{\partial x_3}+x_2r^2u^1+x_1r^2u^2\right],\\
&\sigma^{13}=\lambda\vartheta x_2r+\\
&+\mu\left[x_2r\frac{\partial u^1}{\partial x_1}-x_1r\frac{\partial u^1}{\partial x_2}+\frac{\partial u^1}{\partial x_3}+(1+x_2^2r^2)\frac{\partial u^3}{\partial x_1}-x_1x_2r^2\frac{\partial u^3}{\partial x_2}+x_2r\frac{\partial u^3}{\partial x_3}-ru^2\right],\\
&\sigma^{23}=-\lambda\vartheta x_1r+\\
&\quad+\mu\left[x_2r\frac{\partial u^2}{\partial x_1}-x_1r\frac{\partial u^2}{\partial x_2}+\frac{\partial u^2}{\partial x_3}-x_1x_2r^2\frac{\partial u^3}{\partial x_1}+(1+x_1^2r^2)\frac{\partial u^3}{\partial x_2}-x_1r\frac{\partial u^3}{\partial x_3}+ru^1\right],\\
&\quad\vartheta=\frac{\partial u^1}{\partial x_1}+\frac{\partial u^2}{\partial x_2}+\frac{\partial u^3}{\partial x_3}.
\end{aligned}\right\}\tag{11}
$$

Совокупность усилий, действующих в торцевом сечении стержня статически эквивалентна главному вектору с составляющими X, Y, Z по декартовым осям и составляющими P, Q, R по осям x_1, x_2, x_3 в сечении $x_3=l$ (l — длина стержня) и главному моменту, составляющие которого соответственно будут m_x, m_y, m_z, L, M, N. Составляя обычные условия равновесия на торце, выраженные через X, Y, Z, m_x, m_y, m_z и составляющие тензора напряжений в декартовой системе, и переходя к P, Q, R, L, M, N и контравариантным составляющим тензора напряжений, получаем:

$$
\left.\begin{gathered}
\iint\sigma^{31}do=P+rL;\quad \iint\sigma^{32}do=Q+rM;\quad \iint\sigma^{33}do=R\\
\iint x_2\sigma^{33}do=L;\quad -\iint x_1\sigma^{33}do=M\\
\iint\left[(x_1\sigma^{32}-x_2\sigma^{31})+r\,(x_1^2+x_2^2)\,\sigma^{33}\right]do=N
\end{gathered}\right\}.\tag{12}
$$

Для решения полученной системы уравнений [(9), (8), (11), (12)] полагаем:

$$
\sigma^{ik}=\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu}\sigma_{\nu}^{ik},\quad u^k=\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu}u_{\nu}^{k}.\tag{13}
$$

Считаем, что «кручение» r столь мало, что эти ряды сходятся. Для нулевого приближения получаем систему уравнений теории упругости в декартовых координатах.

Уравнения первого приближения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_1^{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_1^{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_1^{13}}{\partial x_3}-2\sigma_0^{23}=0; \quad \frac{\partial \sigma_1^{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_1^{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_1^{23}}{\partial x_3}+2\sigma_0^{13}=0; \\
\frac{\partial \sigma_1^{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_1^{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_1^{33}}{\partial x_3}=0;
\end{gathered} \tag{14}
$$

$$
\sigma_1^{11}\nu_1+\sigma_1^{12}\nu_2=0; \quad \sigma_1^{21}\nu_1+\sigma_1^{22}\nu_2=0; \quad \sigma_1^{31}\nu_1+\sigma_2^{32}\nu_2=0; \tag{15}
$$

$$
\left.\begin{gathered}
\iint \sigma_1^{31}do=L; \quad \iint \sigma_1^{32}do=M; \quad \iint \sigma_1^{33}do=0 \\
\iint \sigma_1^{33}x_2do=0; \quad \iint \sigma_1^{33}x_1do=0 \\
\iint (x_1\sigma_1^{32}-x_2\sigma_1^{31})\,do=-\iint (x_1^2+x_2^2)\,\sigma_0^{33}do
\end{gathered}\right\}, \tag{16}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_1^{11}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_0^1}{\partial x_3}\right), \\
\sigma_1^{22}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_2}-x_1\frac{\partial u_0^2}{\partial x_3}\right), \\
\sigma_1^{33}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\left(\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3}+x_2\frac{\partial u_0^3}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u_0^3}{\partial x_2}\right), \\
\sigma_1^{12}&=\mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_0^2}{\partial x_3}-x_1\frac{\partial u_0^1}{\partial x_3}\right), \\
\sigma_1^{13}&=\lambda\vartheta_0x_2+\mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1^3}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_0^1}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u_0^1}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial u_0^3}{\partial x_3}-u_0^2\right), \\
\sigma_1^{23}&=-\lambda\vartheta_0x_1+\mu\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1^3}{\partial x_2}-x_1\frac{\partial u_0^2}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial u_0^2}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u_0^3}{\partial x_3}+u_0^1\right), \\
\vartheta_1&=\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1^2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

Приложению этих уравнений к задаче Сен-Венана будут посвящены следующие сообщения.

Ленинградский индустриальный институт.

Поступило 10 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Mc Connell, Applications of the Absolute Differential Calculus, London and Glasgow (1931).