Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 1

МЕХАНИКА

Академик Н. Е. КОЧИН

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВЫХ ЦЕПОЧЕК КАРМАНА

Как известно, Карманом установлено условие, необходимое для того, чтобы две параллельные цепочки вихрей с равными, но противоположными по знаку циркуляциями составляли устойчивую систему. Это условие состоит в том, что вихри одной цепочки должны быть сдвинуты относительно вихрей другой цепочки как раз на половину расстояния l между двумя последовательными вихрями каждой цепочки и что отношение расстояния h между цепочками к длине l должно иметь вполне определенное значение, определяющееся соотношением:

$$\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}=1, \quad \operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}=\sqrt{2}, \tag{1}$$

откуда $h=0.2806\ldots l$.

Однако это условие является лишь необходимым условием устойчивости; в самом деле, оно было получено Карманом из рассмотрения частного вида смещений, предполагавшихся бесконечно малыми, так что в уравнениях возмущенного движения вихрей были отброшены члены порядка малости выше первого.

Мы покажем, что условие Кармана не является достаточным условием устойчивости. А именно мы покажем, что вихревые цепочки Кармана образуют неустойчивую систему, если смещения вихрей мы будем считать конечными величинами, хотя бы и сколь угодно малыми, и если мы будем брать уравнения возмущенного движения вихрей в полном виде.

Сделаем предварительно одно замечание. Пусть мы имеем две цепочки вихрей. Если при произвольных малых смещениях всех или некоторых вихрей в начальный момент времени все вихри с течением времени будут оставаться вблизи тех положений, которые они имели бы, если бы двигались, не подвергаясь смещениям, то говорят, что движение устойчиво, в противном случае движение называется неустойчивым. При таком общем определении устойчивости легко без всяких вычислений установить неустойчивость вихревых цепочек Кармана. В самом деле, сместим все вихри одной из цепочек на одну и ту же малую величину в одном и том же направлении, тогда обе цепочки вихрей будут двигаться поступательно с одной и той же скоростью, отличной либо по величине, либо по направлению от скорости поступательного движения невозмущенных цепочек Кармана. А тогда ясно, что все вихри будут удаляться с малыми, но постоянными скоростями от положений, отвечающих невозмущенному состоянию, так что движение оказывается неустойчивым. Однако очевидно, что при этом конфигурация системы будет сохраняться.

Поэтому изменим определение устойчивости цепочек Кармана следующим образом: будем называть систему вихрей устойчивой, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε можно указать такое положительное число δ, что при смещениях вихрей, не превосходящих в начальный момент времени величины δ, расстояние между любыми двумя вихрями во все время движения будет отличаться от расстояния между этими вихрями в невозмущенном состоянии системы не больше, чем на ε.

Перейдем теперь к доказательству неустойчивости цепочек Кармана. Пусть в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ мы имеем две цепочки вихрей. Одна цепочка состоит из вихрей интенсивности $+\Gamma$, расположенных в точках

$$\frac{l}{4}+\frac{ih}{2}+nl \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а другая состоит из вихрей интенсивности $-\Gamma$, расположенных в точках

$$-\frac{l}{4}-\frac{ih}{2}+nl \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Разделим каждую из этих двух цепочек на две, относя в одну из них вихри с четным n, в другую — вихри с нечетным n. Таким образом мы получим четыре цепочки вихрей, представителями которых являются четыре вихря, расположенных в точках

$$z_{10}=\frac{l}{4}+\frac{ih}{2}, \quad z_{20}=\frac{5l}{4}+\frac{ih}{2}, \quad z_{30}=-\frac{l}{4}-\frac{ih}{2}, \quad z_{40}=\frac{3l}{4}-\frac{ih}{2}. \tag{2}$$

Дадим теперь всем вихрям каждой из четырех цепочек вихрей одни и те же смещения, различные для всех четырех цепочек; вихри, являющиеся представителями этих четырех цепочек, пусть теперь имеют комплексные координаты z_1, z_2, z_3, z_4.

Движение жидкости, вызываемое такой системой вихрей, имеет комплексный потенциал скорости

$$w(z)= \\ =\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln\sin\frac{\pi(z-z_1)}{2l}+\ln\sin\frac{\pi(z-z_2)}{2l}-\ln\sin\frac{\pi(z-z_3)}{2l}-\ln\sin\frac{\pi(z-z_4)}{2l}\right\}$$

и комплексную скорость

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_1)}{2l}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_2)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_3)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_4)}{2l}\right\}.$$

Отсюда для комплексной скорости самих вихрей мы получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar z_1}{dt}&=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_1-z_2)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_1-z_3)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_1-z_4)}{2l}\right\}\\
\frac{d\bar z_2}{dt}&=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_2-z_1)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_2-z_3)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_2-z_4)}{2l}\right\}\\
\frac{d\bar z_3}{dt}&=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_3-z_1)}{2l}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_3-z_2)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_3-z_4)}{2l}\right\}\\
\frac{d\bar z_4}{dt}&=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_4-z_1)}{2l}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_4-z_2)}{2l}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_4-z_3)}{2l}\right\}
\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Интегрирование этой системы и определяет z_1, z_2, z_3, z_4 в функции времени, т. е. определяет движение всех четырех цепочек вихрей. В частности, если начальных возмущений нет, т. е. начальные значения z_1, z_2, z_3, z_4 определяются формулами (2), то все четыре цепочки будут перемещаться поступательно параллельно оси Ox с одной и той же скоростью $\frac{\Gamma}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l}$.

Положим поэтому в общем случае

$$z_k = \frac{\Gamma t}{2l}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi h}{l} + z_{k_0} + \frac{2l}{\pi}\zeta_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{4}$$

где ζ_k суть безразмерные смещения вихрей относительно тех положений, которые они имеют в невозмущенном движении. Введем далее безразмерное время $\tau = \frac{\Gamma\pi t}{8l^2}$ и положим еще $\frac{\pi h}{2l} = H$, тогда система (3) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar\zeta_1}{d\tau} &= i\left\{\mathrm{tg}\,(\zeta_1-\zeta_2)+\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_1-\zeta_3\right)+\right.\\
&\quad\left.+\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_1-\zeta_4\right)\right\}-2\mathrm{th}\,2H\\
\frac{d\bar\zeta_2}{d\tau} &= i\left\{\mathrm{tg}\,(\zeta_2-\zeta_1)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}+iH+\zeta_2-\zeta_3\right)+\right.\\
&\quad\left.+\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_2-\zeta_4\right)\right\}-2\mathrm{th}\,2H\\
\frac{d\bar\zeta_3}{d\tau} &= i\left\{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_1-\zeta_3\right)+\right.\\
&\quad\left.+\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}+iH+\zeta_2-\zeta_3\right)-\mathrm{tg}\,(\zeta_3-\zeta_4)\right\}-2\mathrm{th}\,2H\\
\frac{d\bar\zeta_4}{d\tau} &= i\left\{\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_1-\zeta_4\right)+\right.\\
&\quad\left.+\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+iH+\zeta_2-\zeta_4\right)-\mathrm{tg}\,(\zeta_4-\zeta_3)\right\}-2\mathrm{th}\,2H
\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Эта система имеет очевидный интеграл

$$\zeta_1+\zeta_2-\zeta_3-\zeta_4 = \mathrm{const};$$

примем константу в правой части равной нулю, так что

$$\zeta_4 = \zeta_1+\zeta_2-\zeta_3. \tag{6}$$

Очевидно, что при этом предположении будет выполняться равенство

$$\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_3+y_4}{2} = \frac{y_{10}+y_{20}}{2}-\frac{y_{30}+y_{40}}{2} = h,$$

показывающее, что среднее расстояние между вихрями верхней и нижней цепочек таково же, как и в случае невозмущенного движения.

Введем теперь обозначения

$$2(\zeta_3-\zeta_1) = \alpha, \quad 2(\zeta_4-\zeta_1) = \beta, \tag{7}$$

пользуясь еще (6), получим из (5) после простых преобразований следующую систему уравнений для определения α и β:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar\alpha}{d\tau} &= 4i\sin\beta\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta}-\frac{1}{\cos\beta-i\,\mathrm{sh}\,2H}\right)\\
\frac{d\bar\beta}{d\tau} &= 4i\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta}-\frac{1}{\cos\alpha+i\,\mathrm{sh}\,2H}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Ясно, что неустойчивость вихревых цепочек Кармана в указанном выше смысле будет доказана, если мы докажем, что решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$ предыдущей системы является неустойчивым в смысле Ляпунова.

Система первого приближения, получающаяся, если в правых частях системы (8) оставить только линейные в α и β члены, имеет вид:

$$\frac{d\bar\alpha}{d\tau} = -\frac{2i(1+i\,\mathrm{sh}\,2H)}{1-i\,\mathrm{sh}\,2H}\beta, \quad \frac{d\bar\beta}{d\tau} = -\frac{2i(1-i\mathrm{sh}\,2H)}{1+i\mathrm{sh}\,2H}\alpha;$$

прибавляя два сопряженных уравнения

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{2i(1-i\mathrm{sh}\,2H)}{1+i\mathrm{sh}\,2H}\bar\beta, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{2i(1+i\mathrm{sh}\,2H)}{1-i\mathrm{sh}\,2H}\bar\alpha,$$

сразу увидим, что корни $\varkappa$ определяющего уравнения имеют вид:

$$\varkappa = \pm 2\left\{ \frac{1-\operatorname{sh}^2 2H}{\operatorname{ch}^2 2H} \pm 2i\,\frac{\operatorname{sh} 2H}{\operatorname{ch}^2 2H} \right\}.$$

Если $\operatorname{sh} 2H$ отлично от 1, то два из корней определяющего уравнения имеют положительную вещественную часть и следовательно решение $\alpha=0$, $\beta=0$ будет неустойчивым решением системы (8). Остается рассмотреть случай, выделенный Карманом, когда

$$\operatorname{sh} 2H = \operatorname{sh}\frac{\pi h}{l} = 1, \quad \operatorname{ch} 2H = \sqrt{2}.$$

Система (8) принимает в этом случае вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tau} &= 4i\sin\beta\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta} - \frac{1}{\cos\beta - i}\right) \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= 4i\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha + i}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Так как определяющее уравнение системы первого приближения имеет в этом случае два чисто мнимых и притом двукратных корня $\pm 2i$, то мы имеем дело с особенным случаем, когда первого приближения для решения вопроса об устойчивости решения $\alpha=0$, $\beta=0$ недостаточно.

Положим

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad F = 4\ln\left|\frac{(\cos\alpha + i)(\cos\beta - i)}{\cos\alpha + \cos\beta}\right|, \tag{10}$$

тогда систему (9) можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial\beta_2}, \quad \frac{d\alpha_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial\beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial\alpha_2}, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}. \tag{11}$$

Эта система имеет очевидный интеграл

$$F = \text{const.} \tag{12}$$

Пусть начальные условия таковы, что константа обращается в нуль, так что мы имеем интеграл

$$\begin{aligned} F = & -2\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2 + \frac{1}{8}\alpha_1^4 - \frac{2}{3}\alpha_1^3\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_1^2\alpha_2^2 + \frac{2}{3}\alpha_1\alpha_2^3 + \frac{1}{8}\alpha_2^4 + \\ & + \frac{1}{4}(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\beta_1^2-\beta_2^2) - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \frac{1}{8}\beta_1^4 + \frac{2}{3}\beta_1^3\beta_2 - \frac{3}{4}\beta_1^2\beta_2^2 - \\ & - \frac{2}{3}\beta_1\beta_2^3 + \frac{1}{8}\beta_2^4 + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Система уравнений (11) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\tau} &= 2\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_1^3 - \frac{3}{2}\beta_1^2\beta_2 - 2\beta_1\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_2^3 + \ldots \\ \frac{d\alpha_2}{d\tau} &= -2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1^3 - 2\beta_1^2\beta_2 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2^2 + \frac{2}{3}\beta_2^3 + \ldots \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= -2\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_1^3 - \frac{3}{2}\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^3 - \frac{1}{2}\alpha_2(\beta_1^2-\beta_2^2) - \alpha_1\beta_1\beta_2 + \ldots \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= 2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2^2 - \frac{2}{3}\alpha_2^3 - \frac{1}{2}\alpha_1(\beta_1^2-\beta_2^2) + \alpha_2\beta_1\beta_2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где невыписанные члены — степени не ниже пятой от α_1, α_2, β_1, β_2.

Применяя методы А. М. Ляпунова, можно установить, что на основании предыдущих уравнений мы имеем равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\alpha_1^2+\beta_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2+G_1)}{d\tau} &= -(\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) + \ldots \\ \frac{d(\alpha_1\beta_2+\sigma_2\beta_1+G_2)}{d\tau} &= -\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_2^2+\beta_2^2)^2 + \\ & + (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где невыписанные члены — степени не ниже шестой от α_1, α_2, β_1, β_2 и где

$$\left.\begin{aligned} G_1 = {} & \frac{1}{24}(\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2\beta_1^2 + \beta_1^4) - \frac{1}{4}(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \\ & + \frac{1}{24}(\alpha_2^4 - 6\alpha_2^2\beta_2^2 + \beta_2^4) - \frac{1}{8}\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2 - 3\beta_2^2 - \alpha_1^2 + 3\beta_1^2) - \\ & - \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(3\alpha_2^2 - \beta_2^2 - 3\alpha_1^2 + \beta_1^2) \\ G_2 = {} & \frac{1}{24}\left\{\beta_1\alpha_2(3\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 - 3\beta_2^2) - \alpha_1\beta_2(\alpha_1^2 - 3\beta_1^2 + 3\alpha_2^2 - \beta_2^2)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Принимая во внимание условие (13), мы можем также написать:

$$\frac{d(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + G_2)}{d\tau} = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) + \ldots \tag{17}$$

Вводя функцию

$$V = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 + G_1)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + G_2), \tag{18}$$

в силу предыдущих равенств и равенства (13) получим:

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)\left[(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2\right] + \ldots \tag{19}$$

где невыписанные члены — степени не ниже восьмой.

Функция V надлежащим подбором переменных α_1, α_2, β_1, β_2, сколь угодно малых по модулю и удовлетворяющих уравнению (13), может быть сделана отрицательной. Так как в силу (19) производная этой функции V при всех достаточно малых по модулю α_1, α_2, β_1, β_2 кроме равных одновременно нулю отрицательна в силу уравнений системы и равенства (13), то по одной из теорем А. М. Ляпунова решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$ является неустойчивым решением системы (9) и наша теорема доказана.

Институт механики
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
11 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения (1892).