Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЯПИН

РАЗЛОЖЕНИЕ ИСЧИСЛИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРЯМЫЕ СУММЫ ГРУПП ПЕРВОГО РАНГА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 V 1939)

В настоящей работе будет дано необходимое и достаточное условие разложимости исчислимых абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга. Мы будем пользоваться определениями, обозначениями и результатами, приводимыми в моей статье «Некоторые свойства разложений абелевых групп без кручения в прямые суммы» (см. выше).

§ 1. Пусть $\mathfrak{G}$ есть некоторая абелева группа без кручения. Пусть σ есть некоторый надтип, принадлежащий $\mathfrak{G}$. Рассмотрим комплекс, состоящий из 0 и из всех правильных элементов $\mathfrak{G}$, имеющих надтип, равный σ. Если $\mathfrak{G}$ равна сумме (по всевозможным σ) всех таких комплексов, то будем говорить, что $\mathfrak{G}$ допускает правильное представление. Представление не нулевого элемента $G \in \mathfrak{G}$ в виде суммы правильных не нулевых элементов, надтипы которых различны: $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_m$, назовем правильным представлением G. Число m назовем длиной данного представления. Для элемента 0 правильным представлением назовем $0 = 0$ и припишем ему длину, равную 0. Для того, чтобы каждый элемент группы допускал правильное представление, необходимо и достаточно, чтобы сама группа допускала правильное представление.

Будем говорить, что некоторое множество нерасширяемых подгрупп $\mathfrak{G}$ $\Omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{N}, \ldots)$ удовлетворяет условию [*], если каждой группе этого множества может быть сопоставлен некоторый надтип, принадлежащий $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{N} \sim \sigma[\mathfrak{N}]$ $(\mathfrak{N} \in \Omega)$, причем выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{N}$ разлагается в прямую сумму групп первого ранга; 2) $\mathfrak{G}(\sigma[\mathfrak{N}]) = \mathfrak{N} \oplus \overline{\mathfrak{G}}(\sigma[\mathfrak{N}])$; 3) $\sigma[\mathfrak{N}] \neq \sigma[\mathfrak{M}]$, если $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{G}[\Omega]$ условимся обозначать наименьшую из подгрупп $\mathfrak{G}$, содержащую все группы, принадлежащие множеству Ω.

Введем в рассмотрение новые объекты, каждый из которых α определяется при помощи: 1) конечного множества подгрупп $\mathfrak{G}$ $\Omega(\alpha)$, удовлетворяющего условию [*], и 2) пары элементов $G(\alpha)$, $X(\alpha) \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию $G(\alpha) - X(\alpha) \in \mathfrak{G}[\Omega]$. Каждому такому объекту сопоставим два целых не отрицательных числа $a(\alpha)$ и $m(\alpha)$. $a(\alpha)$ есть число таких групп $\mathfrak{N} \in \Omega(\alpha)$, для которых $X(\alpha)$ не содержится в $\overline{\mathfrak{G}}(\sigma[\mathfrak{N}])$, $m(\alpha)$ есть наименьшая из длин различных правильных представлений элемента $X(\alpha)$. Частично упорядочим множество всех таких объектов, а именно будем говорить, что объект α меньше объекта β ($\alpha < \beta$), если выполняются условия: 1) $G(\alpha) = G(\beta)$, 2) $\Omega(\alpha) \supset \Omega(\beta)$, 3) $a(\alpha) \leqslant a(\beta)$, 4) если $a(\alpha) = a(\beta)$, то $m(\alpha) < m(\beta)$. Отметим, что цепочка убывающих объектов может содержать лишь конечное число объектов.

§ 2. Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ допускает правильное представление и пусть для всякого надтипа σ, принадлежащего $\mathfrak{G}$, группа $\mathfrak{G}(\sigma)$ разлагается в прямую сумму группы $\overline{\mathfrak{G}}(\sigma)$ и групп первого ранга, тогда если для некоторого объекта α $m(\alpha) \neq 0$, то существует объект β меньший α: $\beta < \alpha$.*

Для доказательства леммы рассмотрим одно из наикратчайших правильных представлений элемента $X(\alpha)$: $X(\alpha) = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. Среди элементов X_i существует такой, надтип которого не делится ни на один из надтипов прочих X_i. Для определенности пусть это будет X_1, надтип которого обозначим через σ_1. В доказательстве придется различать два случая:

1) Пусть для некоторого $\mathfrak{N} \in \Omega(\alpha)$ имеет место $\sigma[\mathfrak{N}] = \sigma_1$. Тогда элемент X_1 допускает разложение $X_1 = N + U$, где $U \in \overline{\mathfrak{G}}(\sigma[\mathfrak{N}])$ и $N \in \mathfrak{N}$, причем $N \neq 0$. Составим новый объект β: $\Omega(\beta) = \Omega(\alpha)$, $G(\beta) = G(\alpha)$, $X(\beta) = X(\alpha) - N$. Новый объект $\beta < \alpha$, что следует из того, что $a(\beta) < a(\alpha)$. Для доказательства последнего замечаем, что, с одной стороны, $X(\alpha) \overline{\in} \overline{\mathfrak{G}}(\sigma_1)$, в то время как $X(\beta) \in \overline{\mathfrak{G}}(\sigma_1)$. С другой стороны, можно показать, что предположение о существовании надтипа σ_2 таково, что $X(\alpha) \in \overline{\mathfrak{G}}(\sigma_2)$, в то время как $X(\beta) \overline{\in} \overline{\mathfrak{G}}(\sigma_3)$ приводит к противоречию с правильностью элемента X_1.

2) Пусть ни для одного $\mathfrak{N} \in \Omega(\alpha)$ не имеет места $\sigma[\mathfrak{N}] = \sigma_1$. При помощи теоремы 2 («Некоторые свойства...») можно произвести такое разложение $\mathfrak{G}(\sigma_1) = \mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{G}}(\sigma_1)$, что $\mathfrak{M} \ni X_1$. Составим новый объект β: $\Omega(\beta) = (\Omega(\alpha), \mathfrak{M})$, $G(\beta) = G(\alpha)$, $X(\beta) = X_2 + X_3 + \ldots + X_m$. Очевидно $m(\beta) < m(\alpha)$; можно также показать, что $a(\beta) \leqslant a(\alpha)$, что и означает, что $\beta < \alpha$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ допускает правильное представление и пусть для каждого надтипа σ, принадлежащего $\mathfrak{G}$, группа $\mathfrak{G}(\sigma)$ разлагается в прямую сумму группы $\overline{\mathfrak{G}}(\sigma)$ и групп первого ранга. Пусть далее даны некоторый элемент $G \in \mathfrak{G}$ и некоторое конечное множество Ω_1 подгрупп $\mathfrak{G}$, удовлетворяющее условию [*], тогда существует конечное множество Ω_2 подгрупп $\mathfrak{G}$, также удовлетворяющее условию [*] и такое, что $\Omega_2 \supset \Omega_1$ и $\mathfrak{G}[\Omega_2] \ni G$.*

Для доказательства леммы определяем объект $\alpha_1 : \Omega(\alpha_1) = \Omega_1$, $G(\alpha_1) = X(\alpha_1) = G$. Далее, пользуясь леммой 1, строим цепочку убывающих объектов $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, которая должна оборваться на некотором объекте α_t, для которого $m(\alpha_t) = 0$. Легко показать, что $\Omega_2 = \Omega(\alpha_t)$ и будет искомым множеством.

§ 3. Теперь предположим, что $\mathfrak{G}$ есть исчислимая группа. Для каждого надтипа σ, принадлежащего $\mathfrak{G}$, перенумеруем все элементы, надтипы которых равны σ: $G_{\sigma,1}$, $G_{\sigma,2}$, ..., и определим ряд нерасширяемых подгрупп $\mathfrak{G}_{\sigma,0} = \overline{\mathfrak{G}}(\sigma)$, $\mathfrak{G}_{\sigma,n} = \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{G}}(\sigma), G_{\sigma,1}, \ldots G_{\sigma,n})$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Теорема. *Для того, чтобы исчислимая абелева группа без кручения $\mathfrak{G}$ разлагалась в прямую сумму групп первого ранга, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ допускала правильное представление и чтобы для всех σ и n, для которых $G_{\sigma,n} \overline{\in} \mathfrak{G}_{\sigma,n-1}$, удовлетворялись условия $[G_{\sigma,n}, \mathfrak{G}_{\sigma,n-1}]$.*

Пусть $\mathfrak{G}$ разложима требуемым образом; в этом случае все элементы, входящие в прямые слагаемые разложения, правильны, следовательно $\mathfrak{G}$ допускает правильное представление. Пользуясь теоремой 2 («Некоторые свойства...»), можно показать, что группа $\mathfrak{G}_{\sigma,n-1}$ является прямым слагаемым $\mathfrak{G}_{\sigma,n}$, для чего согласно теореме 1 («Некоторые свойства...») должно выполняться $[G_{\sigma,n}, \mathfrak{G}_{\sigma,n-1}]$.

Для доказательства достаточности перенумеруем все элементы $\mathfrak{G}: G_0 = 0, G_1, G_2, \ldots$ Пользуясь леммой 2, можно построить по индукции последовательность множеств подгрупп $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$, удовлетворяющую условиям: 1) $\mathfrak{Q}_n$ удовлетворяет [*], 2) $\mathfrak{Q}_{n+1} \supset \mathfrak{Q}_n$, 3) $\mathfrak{G}[\mathfrak{Q}_n] \ni G_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму групп, входящих в множества $\mathfrak{Q}_n$, а так как каждая из этих групп разлагается в прямую сумму групп первого ранга, то следовательно и $\mathfrak{G}$ допускает такое разложение.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
5 V 1939.