

УДК 536.2

**ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ ПОЛЯ
В СИСТЕМЕ «СРЕДА – ИСТОЧНИК ЭНЕРГИИ»****О.Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д.Г. КРОЛЬ***(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)*

Изучена задача о генерации двумерных периодических тепловых полей в системе «локально-неравновесная среда – объемный источник энергии». Нестационарные свойства теплопереноса обусловлены релаксацией теплового потока (модель Максвелла). Численно-аналитический подход к проблеме основан на изучении трех типов двумерностей: аддитивного, мультипликативного и «ребристого». Детально изучены свойства теплового поля, связанные с параметрами двумерной неоднородности: амплитудным, частотным и крутизны всплеска температуры. Установлена принципиальная роль конкуренции между генерацией энергии и теплоотводом. Приведены результаты серии модельных расчетов, демонстрирующие основные типы периодических структур и закономерности их пространственно-временной эволюции. Результаты расчетов иллюстрируются построением семейств изотерм для двух режимов релаксации: аperiodического и периодического. Прикладные аспекты работы относятся к задаче о периодической кристаллизации расплавов металлов и высокоскоростной кристаллизации аморфных пленок.

Введение. Существуют разнообразные физико-энергетические системы, принцип действия которых основан на выделении тепла и последующем теплоотводе: горение конденсированных сред [1]; получение сильных магнитных полей с помощью сверхпроводящих магнитных систем [2]; охлаждение крупных энергетических устройств до рабочей температуры криостатирования [3]; тепловая бистабильность для металлов с электрическим током при свободной конвекции охлаждающего газа [4] и др. Применительно к этому кругу задач в работе [5] был изучен вопрос о конечном состоянии системы «среда – источник энергии» при воздействии на нее некоторого теплового возмущения заданной формы. Условия, определяющие асимптотическую эволюцию во времени начального теплового поля, анализировались на основе уравнения теплопроводности с двумя объемными источниками энергии, моделирующими генерацию тепла и теплоотвод. В обзоре [4] эти физические явления рассматриваются с позиций локализованных на неоднородностях нелинейных волн: на основе уравнения теплопроводности выполнен анализ специфических особенностей локализации доменов и доменных стенок. Все эти теоретические исследования относятся к весьма распространенному случаю, когда в системе «среда – источник энергии» имеется одна неизвестная функция – температура, и анализ динамических свойств проводится в рамках одномерного параболического уравнения теплопроводности. В данной работе мы развиваем этот подход в двух направлениях: 1) учет локально-неравновесных тепловых свойств среды; 2) построение двумерных температурных полей.

В дополнение к уже названным задачам, в которых существует конкуренция между выделением и поглощением тепла, отметим проблему периодической кристаллизации расплавов металлов [6] и взрывную кристаллизацию аморфных пленок [7]. Именно тепловой аспект этого вопроса составляет предмет данного исследования. Экспериментальные наблюдения показывают, что высокоскоростная кристаллизация при определенных условиях сопровождается формированием периодических по координате температурных полей. Для кристаллизации металла в изложнице характерны периодические полосчатые структуры [6]. Для взрывной кристаллизации аморфных пленок типичны высокая скорость и периодичность распространения фронта кристаллизации: в закристаллизовавшейся области появляются «лепестковые» и «чешуйчатые» структуры [7 – 9]. Существенная нестационарность этих процессов требует учета конечного времени релаксации теплового потока. С теплофизической точки зрения одной из причин периодической кристаллизации является наличие двух температурных областей: в одной области идет интенсивное выделение энергии (окрестность фронта фазового превращения), в другой – теплоотдача в стенку изложницы либо теплоотвод в подложку (в окружающую среду). Эта модель теоретически обоснована и изучена в [10] с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса. Развивая этот подход, применяем здесь знакопеременный источник энергии $q_s(T)$, для которого $dq_s/dT > 0$.

Цель работы – изучить генерацию двумерных периодических тепловых полей в системе «локально-неравновесная среда – источник энергии»; выполнить параметрический анализ задачи на основе физически содержательных модельных расчетов; определить основные типы двумерных периодических структур;

изучить динамические свойства тепловых полей исходя из их зависимости от колебательно-релаксационных режимов в системе «среда – источник энергии».

Постановка задачи. Локально-неравновесная модель переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$\mathbf{q} + \gamma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \text{grad} T, \quad (1)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} = q_v, \quad (2)$$

где T – температура; \mathbf{q} – вектор удельного теплового потока; c – объемная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; γ – время релаксации теплового потока; t – время.

Современное состояние теории локально-неравновесного теплопереноса в нелинейных средах и подробная библиография этой проблемы даны в [11]. Здесь мы рассматриваем двумерные плоские тепловые поля, когда $T = T(x, y, t)$, а вектор теплового потока имеет две компоненты: $q_1 = q_1(x, y, t)$, $q_2 = q_2(x, y, t)$, где x, y – прямоугольные декартовы координаты. Теплофизические свойства среды считаем постоянными: $\lambda, c, \gamma - \text{const}$.

Для размерных и безразмерных уравнений (1), (2) применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} \lambda', \quad c \rightarrow \tilde{c} c', \quad \gamma \rightarrow \gamma', \quad q_v \rightarrow \tilde{q}_v q'_v, \quad T \rightarrow T', \quad \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}', \quad x \rightarrow x', \quad y \rightarrow y', \quad t \rightarrow t',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b} = 1, \quad \tilde{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b} = 1, \quad \tilde{q}_v = \frac{(q_v)_b x_b}{q_b} = 1$$

составлены из масштабов величин, применяемых для обезразмеривания: $T = T' T_b$, $\gamma = \gamma' t_b$, $x_b = y_b$ и т.д. Эти масштабы (они отмечены нижним индексом b) выбираем так, чтобы иметь безразмерные значения $\lambda = 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$. Далее работаем только с безразмерными величинами; штрих над безразмерными величинами не пишем.

Объемный источник энергии линейно зависит от температуры:

$$q_v = q_v^0 + q_v^1 T; \quad q_v^0, q_v^1 - \text{const}, \quad (3)$$

причем полагаем $q_v^0 < 0$, $q_v^1 > 0$. Важным параметром процесса служит температура $T_0^0 = -q_v^0 / q_v^1 > 0$, при которой $q_v(T_0^0) = 0$. Далее изотерму $T(x, y, t) = T_0^0$ будем называть нейтральной, поскольку при $0 < T < T_0^0$ идет теплоотдача, а при $T > T_0^0$ происходит тепловыделение.

Основные типы периодических структур. Рассмотрим два основных варианта эволюции теплового поля во времени: аperiodический режим и затухающие периодические колебания.

Структуру пространственно-периодических тепловых полей иллюстрируем на плоскости (x, y) построением семейств изотерм. Накопленный нами опыт вычислений позволяет утверждать, что существуют три основных варианта:

- 1) цепочка (дорожка) изотерм, включающая в себя замкнутые изотермы (в гидродинамике такие изолинии носят название «кошачьи глаза»);
- 2) ячеистая структура, состоящая только из замкнутых изотерм;
- 3) решетчатая структура, состоящая из сомкнувшихся друг с другом ячеек и/или дорожек изотерм.

Кроме того, наблюдаются смешанные варианты, которые являются комбинацией перечисленных трех типов. В наиболее сложных случаях такие комбинации дают мозаичную структуру.

Устанавливаемое в ходе релаксационного процесса ($t \rightarrow \infty$) стационарное температурное поле определяется одной из трех следующих зависимостей:

- аддитивная двумерность:

$$T_0 = T_0^0 + A_0 \sin(k_1 x + \alpha_0) + B_0 \sin(k_1 y + \beta_0), \quad k_1^2 = q_v^1 / \lambda, \quad A_0, B_0, \alpha_0, \beta_0 - \text{const}; \quad (4)$$

- мультипликативная двумерность:

$$T_0 = T_0^0 + T_0^1 \sin(k_1 x + \alpha_0) \sin(k_2 y + \beta_0), \quad k_1^2 + k_2^2 = q_v^1 / \lambda, \quad T_0^1, \alpha_0, \beta_0 - \text{const}; \quad (5)$$

здесь одна из частот k_1, k_2 – произвольная;

- «ребристые» профили температур, составленные из конечной суммы точных решений:

$$T_0 = T_0^0 + \sum_{i=1}^n T_{01} \sin(k_1 x + \alpha_0) \exp[r_1 (y - y_i)] + \sum_{i=1}^n T_{02} \sin(k_2 y + \beta_0) \exp[r_2 (x - x_i)], \quad (6)$$

$$\frac{q_v^1}{\lambda} = k_1^2 - r_1^2 > 0, \quad \frac{q_v^1}{\lambda} = k_2^2 - r_2^2 > 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $r_1 < 0$ при $y \geq y_i$; $r_1 > 0$ при $y \leq y_i$, т.е. при $y = y_i$ имеем «ребро» – всплеск температуры; аналогично $r_2 < 0$ при $x \geq x_i$; $r_2 > 0$ при $x \leq x_i$, и получаем второе семейство «ребер» $x = x_i$, ортогональное линиям $y = y_i$. Расчеты были выполнены для $n = 5$, «ребра» располагались равномерно с шагом $\Delta x = \Delta y = 7,5$; $x_i = 0$, $y_i = 0$. Далее, на рисунках, относящихся к решению (6), представлена центральная часть области, занятой «ребрами».

Апериодический во времени процесс (АП) определяется следующим решением:

$$T = T_0(x, y) + \tau T_1(x, y), \quad T_1 = A_1 \sin(k_* x + \alpha_1) + B_1 \sin(k_* y + \beta_1), \quad \tau = \exp(-kt), \quad k > 0, \quad (7)$$

$$\lambda_* = \frac{\lambda}{(1 - \gamma k)}, \quad k_1^2 = \frac{q_v^1}{\lambda}, \quad k_*^2 = \frac{q_v^1 + ck}{\lambda_*} \quad A_0, B_0, A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1, k - const.$$

Здесь $T_0(x, y)$ – одно из решений вида (4), (5) или (6). Величина $1/k$ – характерное время. Условие $k_*^2 > 0$ означает в данном случае, что $0 < \gamma k < 1$. Следовательно, имеем периодичность по координатам x, y в медленном аperiодическом по времени процессе: $1/k > \gamma$. Двумерные свойства теплового поля зависят от отношения амплитуд в (4) и (7). Далее приведены результаты расчетов при $A_0/B_0 = A_1/B_1 = \Delta$, где $\Delta \in (0, 1]$ – параметр двумерности. Условие $0 < \Delta < 1$ означает, что у вектора градиента температуры компонента $(grad T)_y$ выражена сильнее, чем $(grad T)_x$, т.е. степень неоднородности теплового поля вдоль оси y выше, чем вдоль оси x . Ясно, что это обстоятельство может быть следствием условий теплообмена изучаемого материала с внешней средой. При $\Delta = 1$ двумерная неоднородность одинаковая вдоль осей x и y . Для мультипликативного решения (5) параметром двумерной неоднородности является отношение частот k_1/k_2 . В решении (6) имеем три параметра неоднородности: 1) амплитудный T_{01}/T_{02} ; 2) частотный k_1/k_2 ; 3) параметр $|r_1/r_2|$ крутизны всплеска температуры на «ребрах», характеризуемый величинами $|r_1|, |r_2|$, входящими в показатели экспонент (см. (6)).

Периодический во времени процесс (ПП) определяется следующим решением:

$$T = T_0(x, y) + A(t) \sin(h_1 x + \beta_1) + B(t) \sin(h_2 x + \beta_2), \quad (8)$$

где $T_0(x, y)$ – одно из решений вида (4), (5) или (6); $h_1, h_2, \beta_1, \beta_2 - const$. Амплитуды $A(t), B(t)$ есть решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\ddot{A} + 2n_1 \dot{A} + \omega_1^2 A = 0, \quad \ddot{B} + 2n_2 \dot{B} + \omega_2^2 B = 0; \quad (9)$$

$$2n_i = \frac{1}{c\gamma} (c - \gamma q_v^1) \geq 0, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{c\gamma} (\lambda h_i^2 - q_v^1) > 0; \quad i = 1, 2.$$

Начальные условия $t = 0$, $A(0) = A_1$, $B(0) = B_1$ важны при выборе исходного состояния системы «среда – источник энергии». Нестационарные решения (7) и (8) обладают аддитивной двумерностью по координатам x, y . Практика наших расчетов показала, что именно такая структура наиболее содержательна в физическом отношении.

Результаты и их обсуждение. Изотерму $T = T' < T_0^0$ далее для наглядности называем «холодной»; этот же термин применяем для температурной области, где $q_v(T) < 0$. Для изотермы $T = T'' > T_0^0$ и температурной области, где $q_v(T) > 0$, применяем термин «горячий».

На рисунке 1 показана роль амплитудного параметра Δ двумерной неоднородности. При $0 < \Delta < 1$ основным элементом периодической структуры является полоса, тянущаяся вдоль оси y . При $\Delta \rightarrow 1$

нейтральные изотермы образуют решетку, конфигурация которой зависит от входных данных задачи. Во всех изучавшихся нами вариантах наблюдалось симметричное расположение отдельных элементов решетки относительно некоторых линий на плоскости (x, y) .

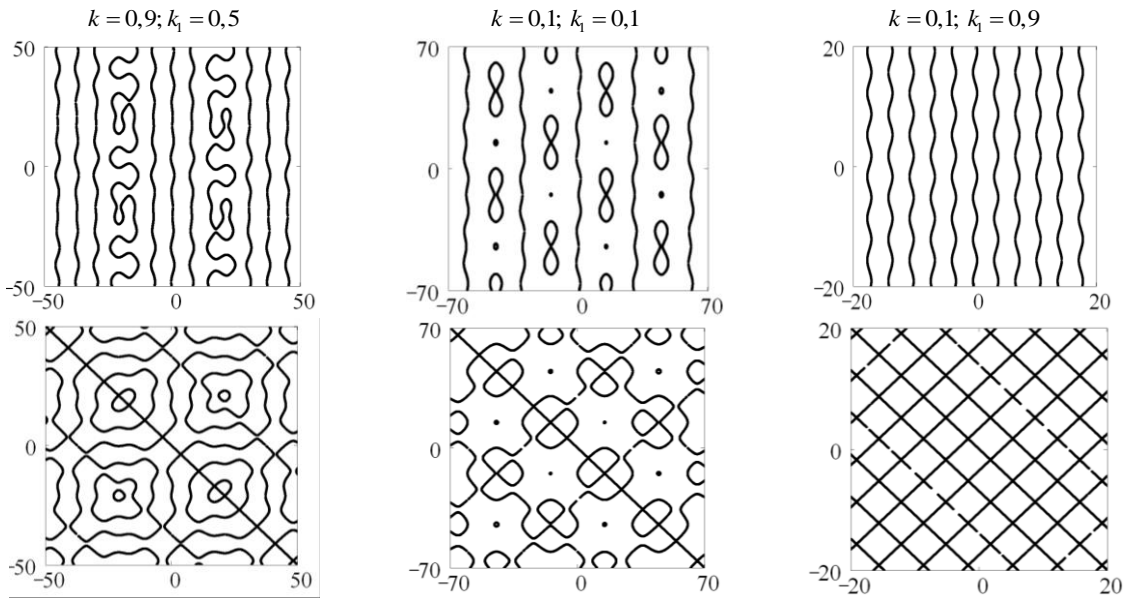


Рис. 1. Двумерные свойства начального теплового поля при аддитивной двумерности.

Нейтральная изотерма $T = 0,5$:

верхняя полоса рисунков $\Delta = 0,3$; нижняя полоса – $\Delta = 1,0$

При слабо выраженной двумерности ($\Delta = 0,1$) аперриодического процесса (рис. 2, а) имеем нейтральные изотермы, близкие к прямолинейным и разделяющие холодные и горячие области; «кошачьи глаза» чередуются регулярным образом. При возрастании параметра двумерности ($\Delta = 0,5$) нейтральные изотермы принимают синусоидальную форму (рис. 2, б). Если процесс периодический и $\Delta = 1$, то нейтральная изотерма представляет собой решетку (рис. 2, в), в клетках которой «шахматным» образом чередуются холодные и горячие изотермы.

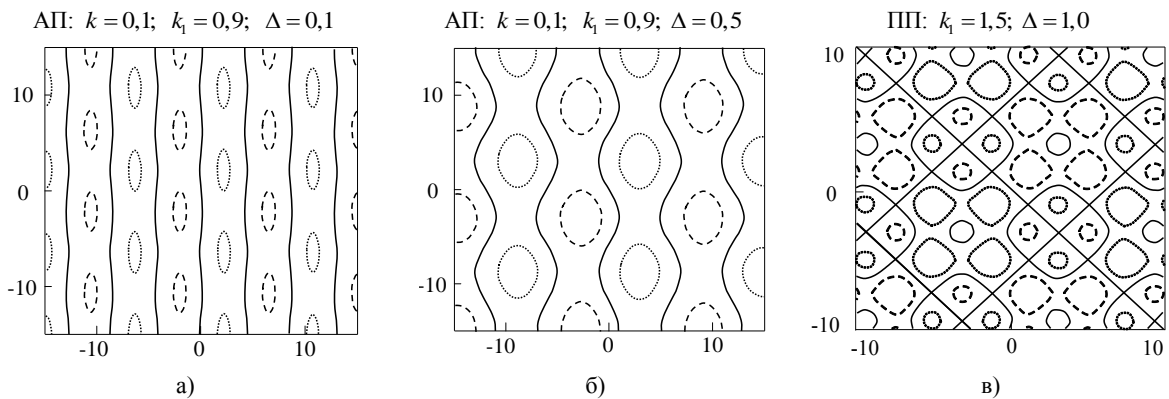


Рис. 2. Примеры начальных состояний тепловых полей при аддитивной двумерности:

изотерма $T' = 0,4$ (.....); нейтральная изотерма $T = 0,5$ (—); изотерма $T'' = 0,6$ (- - -)

В ходе аперриодической эволюции теплового поля ячеистая структура холодной изотермы преобразуется в дорожки изотерм (рис. 3, а), вытянувшиеся вдоль оси y . Здесь и далее $t^* \approx 1$ – характерный промежуточный момент времени. В начальном состоянии холодная изотерма образует комплексы, составленные из двух концентрических линий (рис. 3, б); в ходе эволюции каждый такой комплекс распадается на четыре ячейки, расположенные симметрично относительно исходного центра; в итоге имеем ячеистую структуру. Процесс периодический с отчетливо сформировавшейся двумерностью ($\Delta = 1$) (рис. 3, в); для

нейтральной изотермы исходная решетка имеет замысловатую конфигурацию мозаичного типа, а в результате эволюции получаем простейшую решетку с прямоугольными клетками.

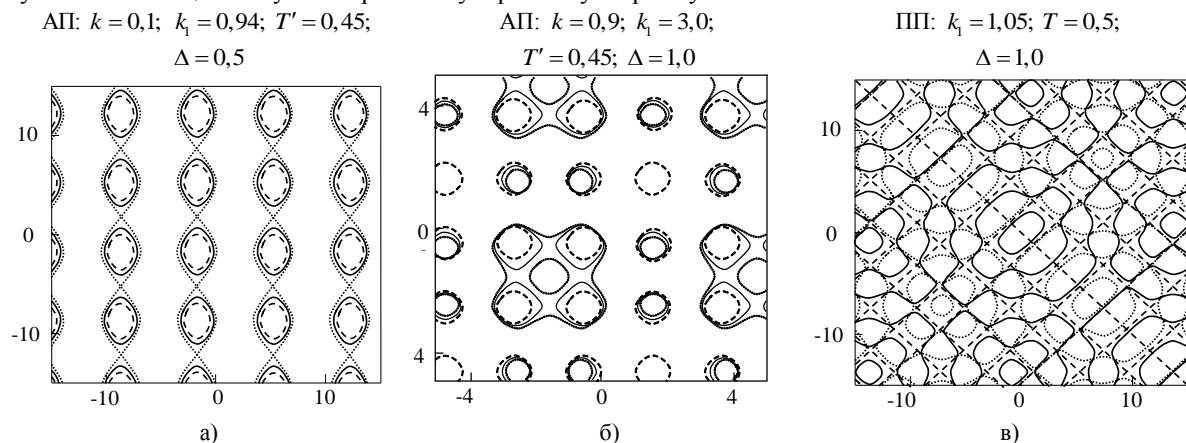


Рис. 3. Эволюция во времени изотерм при аддитивной двумерности:
 $t = 0$ (.....); $t = t^*$ (—); $t = \infty$ (---)

Анализируя рисунок 4, ясно, что в мультипликативном варианте структура начальных состояний холодной, нейтральной и горячей изотерм имеет свойства, во многом похожие на те, что наблюдаются в аддитивном варианте (см. рис. 2).

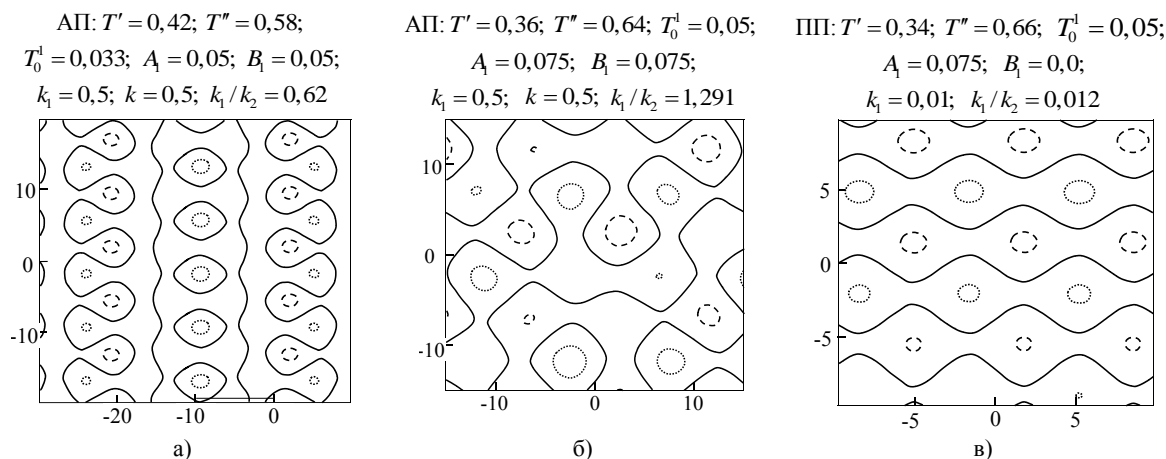


Рис. 4. Примеры начальных состояний тепловых полей при мультипликативной двумерности:
 изотерма $T = T'$ (.....); нейтральная изотерма $T = 0,5$ (—); изотерма $T = T''$ (---)

Нейтральная изотерма образует в начальном состоянии полосчатую структуру (рис. 5, а, б), трансформирующуюся в типичную решетку с прямоугольными клетками; здесь различие между АП- и ПП-режимами в том, что в промежуточном АП-состоянии существуют уединенные «кошачьи глаза», а в ПП-состоянии их нет.

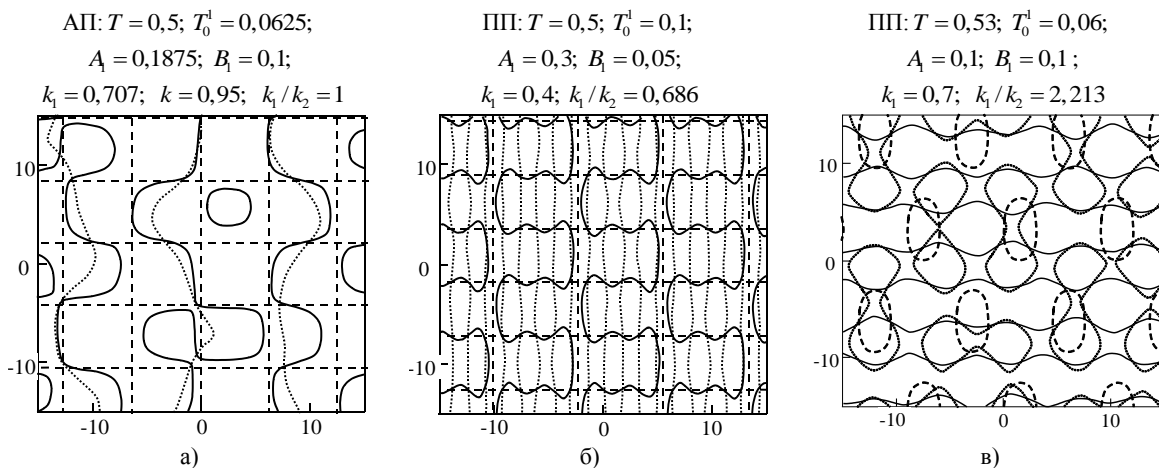
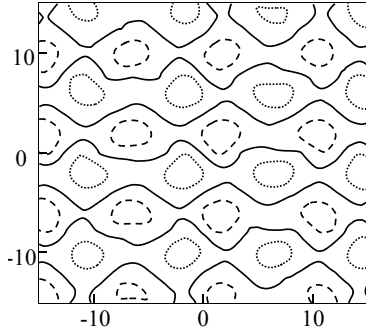


Рис. 5. Эволюция во времени изотерм при мультипликативной двумерности:

$t = 0$ (.....); $t = t^*$ (—); $t = \infty$ (- - -)

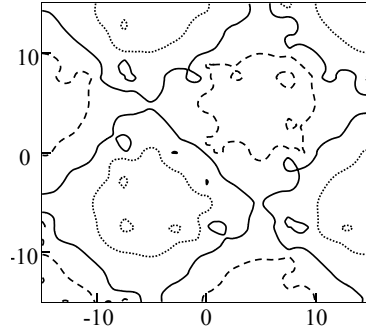
«Рёбристые» профили температур дают весьма своеобразные примеры поведения двумерных температурных полей. На рисунке 6, а вытянутые вдоль оси x дорожки изотерм содержат холодные и горячие «кошачьи глаза»; вдоль оси y идет чередование холодных и горячих дорожек. На рисунке 6, б отчетливо выражен «шахматный» порядок расположения холодных и горячих областей. На рисунке 6, в имеем чередование холодных и горячих полос, разделенными нейтральными изотермами синусоидальной формы.

АП: $T' = 0,38$; $T'' = 0,62$; $T_{01} = 0,05$;
 $T_{02} = 0,05$; $k = 0,2$; $r_1 = 1,0$;
 $r_2 = 0,5$; $k_1 = 1,225$; $k_2 = 0,866$



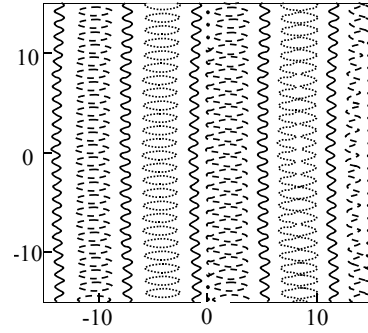
а)

АП: $T' = 0,42$; $T'' = 0,58$; $T_{01} = 0,05$;
 $T_{02} = 0,05$; $k = 0,95$; $r_1 = 1,25$;
 $r_2 = 1,25$; $k_1 = 1,569$; $k_2 = 1,569$



б)

ПП: $T' = 0,38$; $T'' = 0,62$;
 $T_{01} = 0,04$; $T_{02} = 0,04$; $r_1 = 0,1$;
 $r_2 = 5,0$; $k_1 = 0,49$; $k_2 = 5,023$



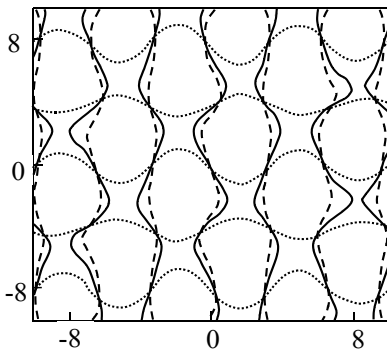
в)

Рис. 6. Примеры начальных состояний тепловых полей при «рёбристом» профиле температур:

изотерма $T = T'$ (.....); нейтральная изотерма $T = 0,5$ (—); изотерма $T = T''$ (- - -)

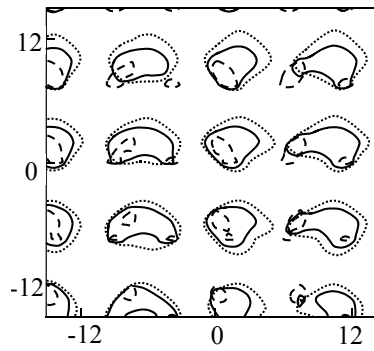
Рисунок 7, а демонстрирует АП-ситуацию, когда все три параметра двумерности (амплитудный, частотный и крутизны всплеска) равны 1. Семейство нейтральных изотерм образует полосчатую структуру и ведет себя нетривиальным образом: при переходе в стационарное состояние эти полосы синхронно поворачиваются на 90° . На рисунке 7, б показано, что в АП-режиме ячеистая структура, образуемая горячей изотермой, сохраняется при $t \in [0, \infty]$ в условиях резко выраженной двумерной неоднородности теплового поля. Еще один возможный вариант поведения семейства нейтральных изотерм в периодическом процессе показан на рисунке 7, в: синусоидальные линии распрямляются и образуют простейшую совокупность прямых полос.

АП: $T = 0,5$; $T_{01} = 0,05$; $T_{02} = 0,05$;
 $k = 0,5$; $r_1 = 0,5$; $r_2 = 0,5$;
 $k_1 = 0,975$; $k_2 = 0,975$



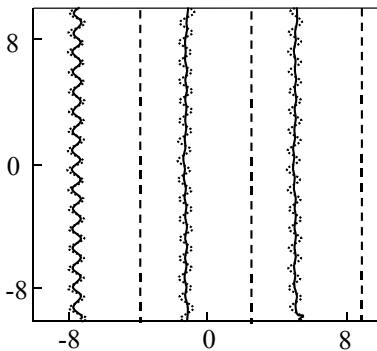
а)

АП: $T = 0,54$; $T_{01} = 0,05$; $T_{02} = 0,05$;
 $k = 0,2$; $r_1 = 1,0$;
 $r_2 = 0,5$; $k_1 = 1,225$; $k_2 = 0,866$



б)

ПП: $T = 0,5$; $T_{01} = 0,04$; $T_{02} = 0,04$;
 $r_1 = 0,1$; $r_2 = 5,0$;
 $k_1 = 0,49$; $k_2 = 5,023$



в)

Рис. 7. Эволюция во времени изотерм при «рёбристом» профиле температур:

$t = 0$ (.....); $t = t^*$ (—); $t = \infty$ (- - -)

Отметим важную особенность: во всех выполненных нами расчетах (см. рис. 2, 4, 6) существует симметрия типов периодических структур в холодных и горячих областях, располагающихся по разные стороны нейтральной изотермы.

Например, на рисунке 4, а холодные и горячие изотермы образуют «кошачьи» глаза.

На рисунке 6, в холодные и горячие изотермы составляют ряды из сомкнувшихся ячеек одинаковой формы.

Вопрос об асимметрии тепловых процессов в нелинейных нестационарных условиях подробно изучен нами в работах [12, 13].

В заключение отметим, что представленные здесь качественные свойства изотерм сохраняются в следующих случаях:

- 1) если в аperiодическом процессе вида (7) происходит немонотонное по t изменение температуры;
- 2) если в периодическом процессе (8) происходят гармонические колебания ($n_i = 0, i = 1, 2$) по времени.

Выводы. В среде, обладающей локально-неравновесными свойствами, формирование пространственно-периодических тепловых структур происходит под влиянием конкуренции между температурными областями с тепловыделением и теплоотдачей. В системе «среда – знакопеременный источник энергии» образуются три основных типа периодических структур: дорожки, ячейки, решетки. Их динамические свойства существенно зависят от степени нестационарности процесса и от режима затухания (аperiодический, периодический). Эволюция периодических структур сопровождается не только многовариантностью переходов от одного типа периодичности к другому, но и разнообразием комбинаций основных типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлов, Н.В. Лазерная термохимия / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко, Б.С. Лукьянчук. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 295 с.
2. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем / В.А. Альтов [и др.]; под ред. В.В. Сычева. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 312 с.
3. Гидродинамика и теплообмен в сверхпроводниковых устройствах / З.Л. Миропольский [и др.]; под ред. З.Л. Миропольского и Р.И. Созиева – М.: Наука, 1987. – 288 с.
4. Гуревич, А.В. Локализованные волны в неоднородных средах / А.В. Гуревич, Р.Г. Минц // Успехи физических наук. – 1984. – Т. 142, Вып. 1. – С. 61 – 98.
5. Сигов, А.С. Об асимптотической эволюции начального температурного профиля в системах с двумя устойчивыми положениями равновесия / А.С. Сигов, В.Р. Чечёткин // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 285, № 2. – С. 360 – 365.
6. Эльдарханов, А.С. Процессы кристаллизации в поле упругих волн / А.С. Эльдарханов. – М.: Металлургия, 1996. – 256 с.
7. Александров, Л.Н. Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых плёнок / Л.Н. Александров. – Новосибирск: Наука, 1985. – 224 с.
8. Богданов, Н.М. Спонтанная кристаллизация ультрадисперсных порошков аморфного германия / Н.М. Богданов [и др.] // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 293, № 3. – С. 595 – 598.
9. Olemskoi, A.I. Explosive crystallization mechanism of ultradisperse amorphous films / A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko, V.P. Koverda // Physika A. – 2000. – Vol. 284. – P. 79 – 96.
10. Shablovsky, O.N. A Thermal Model of Periodic Crystallization / O.N. Shablovsky // Crystallography Reports. – 2005. – Vol. 50, Suppl. 1. – P. 62 – 67.
11. Шабловский, О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.
12. Шабловский, О.Н. Динамические свойства контактного теплообмена в двухслойной металлической пластине / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 9 – 14.
13. Шабловский, О.Н. Асимметричные свойства тепловых процессов при поверхностном нагреве двухслойной металлической пластины / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Прикладная физика. – 2005. – № 1. – С. 31 – 38.

Поступила 06.03.2008