Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ПО ПОВОДУ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА

1. Определение. Пусть $S_n = \sum_1^n x_i$, где x_i — независимые случайные величины, М. О. $x_i = 0$, М. О. $x_i^2 = b_i$, $B_n = \sum_1^n b_i$, М. О. $|x_i|^p = C_{i,p}$. Будем называть параметром Ляпунова порядка p отношение $M_{n,p} = \dfrac{\sum_1^n C_{i,p}}{B_n^{\frac{p}{2}}}$; *будем называть условием Ляпунова порядка* p *требование, чтобы*

$$\lim_{n=\infty} M_{n,p} = 0. \tag{1}$$

Будем говорить, что *к сумме* S_n *применима (нормальная) предельная теорема порядка* $p > 2$, *если*

$$\text{вер}\left(\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} < t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = G(t) \quad \text{(равномерно)} \tag{2}$$

и кроме того

$$\lim_{n=\infty} \text{М. О.} \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p e^{-\frac{t^2}{2}} dt = R_p. \tag{3}$$

Теорема. *Условие Ляпунова* $M_{n,p} \to 0$ *порядка* p *достаточно для применимости к сумме* S_n *нормальной предельной теоремы порядка* p *и необходимо, если величины* x_i *равномерно пренебрегаемы* по сравнению с* S_p.

Для $p > 2$ целого и четного высказанная теорема вытекает из сопоставления теоремы Ляпунова с результатом алгебраического вычисления матем. ожид. $\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p$, произведенного акад. А. А. Марковым, согласно которому

$$\text{М. О.} \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p - R_p = \varphi_p(M_{n,p}), \tag{4}$$

где величина $\varphi_p(M_{n,p})$ стремится к нулю вместе с $M_{n,p}$ и кроме того, если $\frac{\text{Max}\, b_i}{B_n} \to 0$ и $M_{n,p} > M > 0$, то при $n \to \infty$ $\varphi_p(M_{n,p}) > \lambda_p > 0$.

* Величины x_i $(i \leqslant n)$ называются равномерно пренебрегаемыми по сравнению с S_n, если разность между вероятностями неравенств $S_n < t\sqrt{B_n} = z$ и $S_n - x_i < t\sqrt{B_n} = z$ при любом z равномерно стремится к нулю с возрастанием n; в данном случае это условие равнозначно $\frac{\text{Max}\, b_i}{B_n} \to 0$. В дальнейшем при утверждении необходимости соответствующего условия мы всегда будем подразумевать, что величины x_i пренебрегаемы.

Действительно, благодаря теореме Ляпунова из $M_{n,p} \to 0$ следует (2), а из (4) следует (3). Обратно, если бы мы имели $M_{n,p} > M > 0$, то предельная теорема порядка p не могла бы иметь место, так как равенство (3) было бы невозможно вследствие второго свойства величины $\varphi_p(M_{n,p})$. Прежде чем перейти к рассмотрению общего случая $p > 2$, заметим, что из (4) вытекает, что условие Ляпунова четного порядка равноценно одному лишь условию (3) того же порядка p, которое кроме того может быть заменено еще менее ограничительным условием

$$\lim_{n=\infty} \text{М. О.} \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \leqslant R_p, \tag{3 bis}$$

так как *знак неравенства* (в случае пренебрегаемости слагаемых) вообще *невозможен*. Кроме того отсюда между прочим нетрудно вывести, что если $F(t)$ есть какая-нибудь предельная функция распределения для $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$, отличная от $G(t)$, то все ее четные моменты больше соответствующих моментов $G(t)$, а следовательно характеристическая функция $\Theta(z)$ функции $F(t)$ либо не целая функция, либо такова, при всяком вещественном значении $y \gtrless 0$, $\frac{\Theta(iy)+\Theta(-iy)}{2} > e^{\frac{y^2}{2}}$.

2. Введем теперь несколько вспомогательных предложений.

Лемма I. Если интегральная функция вероятностей $F_n(x)$ величины y_n стремится равномерно к $F(x)$, т. е.

$$|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon_n, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

причем М. О. $|y_n|^p < C$ ограничено для некоторого $p > 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF(x)$ существует, то при всяком положительном $q < p$

$$\left| \text{М. О.} \, |y_n|^q - \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^q dF(x) \right| < \psi_q(\varepsilon_n),$$

где $\psi_q(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε_n (равномерно при $q \leqslant p' < p$).

Лемма II. Пусть $S_n = \sum\limits_1^n x_i$, $S_n' = \sum\limits_1^n x_i'$, где x_i' и x_i подчиняются одному и тому же закону распределения вероятностей, причем все величины x_i и x_k' независимы. В таком случае: 1) Нормальная предельная теорема порядка p одновременно применима (или неприменима) к S_n и $S_n - S_k' = \sum\limits_1^n x_i - x_i'$. 2) Параметры Ляпунова порядка $p > 2$, соответствующие S_n и $S_n - S_n'$, одновременно ограничены и одновременно стремятся к нулю.

Благодаря лемме II мы можем для упрощения выкладок ограничиться предположением, что величины x_i подчиняются *симметричным* законам. При этом предположении, полагая $S_n^{(i)} = S_n - x_i$, имеем вследствие симметрии ($\delta = p - 2$).

$$\text{М. О.} \, |S_n|^{\delta+2} = \text{М. О.} \sum_1^n [x_i^2 |S_n|^\delta + x_i S_n^{(i)} |S_n|^\delta] =$$

$$= \frac{1}{2} \text{М. О.} \sum_1^n x_i^2 [||S_n^{(i)}| + |x_i||^\delta + ||S_n^{(i)}| - |x_i||^\delta] +$$

$$+ \frac{1}{2} \text{М. О.} [||S_n^{(i)}| + |x_i||^\delta - ||S_n^{(i)}| - |x_i||^\delta].$$

Поэтому ($\delta > 0$)

$$\text{M. O.}\,|S_n|^{\delta+2}-(\delta+1)\,\text{M. O.}\sum_1^n x_i^2\,|S_n^{(i)}|^\delta=\text{M. O.}\sum_1^n T_i, \tag{5}$$

где

$$T_i=\frac{1}{2}\,\{[x_i^2+|x_iS_n^{(i)}|]\,[|S_n^{(i)}|+|x_i|]^\delta+[x_i^2-|x_iS_n^{(i)}|]\,[|S_n^{(i)}|-|x_i|]^\delta\}-$$
$$-(\delta+1)\,x_i^2\,|S_n^{(i)}|^\delta.$$

Таким образом при $|x_i|\geqslant|S_n^{(i)}|$

$$T_i=\frac{1}{2}\,|x_i|\,\{[|x_i|+|S_n^{(i)}|]^{\delta+1}+[|x_i|-|S_n^{(i)}|]^{\delta+1}-2\,(\delta+1)\,|x_i|\,|S_n^{(i)}|^\delta\} \tag{6}$$

и

$$T_i=\frac{1}{2}\,|x_i|\,\{[|S_n^{(i)}|+|x_i|]^{\delta+1}-[|S_n^{(i)}|-|x_i|]^{\delta+1}-2\,(\delta+1)\,|x_i|\,|S_n^{(i)}|^\delta\} \tag{6bis}$$

при $|x_i|\leqslant|S_n^{(i)}|$.

Следовательно, если $|x_i|\geqslant|S_n^{(i)}|$, то

$$|T_i|<2^\delta\,|x_i|^{\delta+2} \tag{7}$$

и кроме того при $\delta\geqslant 2$

$$T_i>\frac{1}{2}\,|x_i|^{\delta+2}. \tag{8}$$

Если же $|x_i|\leqslant|S_n^{(i)}|$, то из ($6^{\text{bis}}$) находим

$$\left.\begin{aligned}&|T_i|<2^\delta\,|x_i|^{\delta+2}\qquad(0<\delta\leqslant 2)\\&|T_i|<\frac{(\delta+1)\,\delta\,(\delta-1)}{24}\,2^\delta\,|x_i|^4\,|S_n^{(i)}|^{\delta-2}\qquad(\delta\geqslant 2)\end{aligned}\right\} \tag{7bis}$$

и кроме того при $\delta\geqslant 2$

$$T_i>\frac{(\delta+1)\,\delta\,(\delta-1)}{12}\,x_i^4\,|S_n^{(i)}|^{\delta-2}\geqslant\frac{(\delta+1)\,\delta\,(\delta-1)}{12}\,|x_i|^{\delta+2}. \tag{8bis}$$

Таким образом из (5), (7), (7^{bis}) следует при $0<\delta=p-2\leqslant 2$

$$\left|\text{M. O.}\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p-(p-1)\sum_1^n\frac{b_i}{B_n}\,\text{M. O.}\left|\frac{S_n^{(i)}}{\sqrt{B_n}}\right|^{p-2}\right|<2^{p-2}M_{n,p}. \tag{9}$$

Пусть условие Ляпунова $M_{n,p}\to 0$ порядка p ($2<p\leqslant 4$) соблюдено. В силу теоремы Ляпунова и леммы I

$$\lim_{n=\infty}\text{M. O.}\left|\frac{S_n^{(i)}}{\sqrt{B_n}}\right|^\delta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^\delta e^{-\frac{t^2}{2}}dt=R_{p-2}\qquad(0<\delta<2).$$

Поэтому из (9) и из соотношения $R_p=(p-1)\,R_{p-2}$ следует, что

$$\lim_{n=\infty}\left|\text{M. O.}\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p-R_p\right|\leqslant\lim_{n=\infty}2^\delta M_{n,p}=0\qquad(p\leqslant 4). \tag{10}$$

Если $p>4$, то, пользуясь тем, что из $M_{n,p}\to 0$ следует $M_{n,p-2}\to 0$, можем считать, что равенство (10) уже доказано для $\delta=p-2$: но для $\delta>2$ из (7) и (7^{bis}) выводим, что

$$|T_i|<2^\delta\left[|x_i|^{\delta+2}+\frac{\delta^3}{24}\,x_i^4\,|S_n^{(i)}|^{\delta-2}\right],\qquad(\delta>2)$$

поэтому

$$\lim_{n=\infty}\left|\text{M. O.}\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p-R_p\right|\leqslant\lim\left[2^\delta M_{n,p}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\delta-1)\,\delta\,(\delta+1)}{6}\,M_{n,4}\,R_{p-4}\right]=0. \tag{10bis}$$

Для доказательства обратного предложения заметим, что при $\delta\geqslant 2$ мы имеем вследствие (8) и (8^{bis})

$$T_i\geqslant\frac{1}{2}\,|x_i|^p.$$

Таким образом

$$\text{М. О.}\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p-(p-1)\sum_1^n\frac{b_i}{B_n}\,\text{М. О.}\left|\frac{S_n^{(i)}}{\sqrt{B_n}}\right|^{p-2}>\frac{1}{2}M_{n,p},$$

$$(p\geqslant 4)$$

откуда заключаем, что (при условии пренебрегаемости) $M_{n,p}\to 0$, если нормальная предельная теорема порядка p применима.

Как видим, наше заключение не распространяется на случай $p<4$. Вследствие этого укажем еще другой путь доказательства, который пригоден для всех.

Положим

$$\text{М. О.}\,|S_n|^{\delta+2}=\text{М. О.}\,|S_n'|^{\delta+2}+\sum{}^*,$$

где сумма $S_n'=\sum\limits_1^n x_n'$ содержит лишь значения $x_i=x_i'$, удовлетворяющие неравенствам $|x_i|\leqslant\tau\sqrt{B_n}$, где $\tau>0$—произвольно малое число. В таком случае, полагая

$$b_i'=\text{М. О.}x_i'^2\; C_{i,p}'=\text{М. О.}\,|x_i'|^p,\quad C_{i,p}^*=C_{i,p}-C_{i,p}',$$

имеем

$$\sum{}^*>\sum_{\substack{1\\ x_i>\tau\sqrt{B_n}}}^n\text{М. О.}\;x_i^2|S_n^*|^\delta\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\\ |x_i|>\tau\sqrt{B_n}}}^n\text{М. О.}\;x_i^2[|x_i|+|S_n^{(i)}|]^\delta>\frac{1}{2}\sum_1^n C_{i,p}^*.$$

С другой стороны, при всяком $p>2$, $C_{i,p}'<b_i'(\tau\sqrt{B_n})^\delta$; поэтому

$$\frac{\sum\limits_1^n C_{i,p}'}{\left[\sum\limits_1^n b_i'\right]^{\frac{p}{2}}}<\left[\tau\sqrt{\frac{B_n}{\sum\limits_1^n b_i'}}\right]^\delta<2\tau^\delta,$$

так как из применимости нормальной предельной теоремы порядка $p\geqslant 2$ следует, что $\lim\limits_{n=\infty}\frac{B_n}{\sum\limits_1^n b_i'}=1$. Следовательно

$$\frac{\sum{}^*}{B_n^{\frac{p}{2}}}=\left|\frac{\text{М. О.}\,|S_n|^p-\text{М. О.}\,|S_n'|^p}{B_n^{\frac{p}{2}}}\right|<\varepsilon_{n,\tau},\tag{11}$$

где $\varepsilon_{n,\tau}$ становится сколь угодно малым при τ достаточно малом, а потому параметр Ляпунова

$$M_{n,p}=\sum_1^n\frac{C_{i,p}'+C_{i,p}^*}{B_n^{\frac{p}{2}}}<2(\tau^\delta+\varepsilon_{n,\tau})$$

должен стремиться к нулю, если имеет место предельная теорема порядка $p>2$.

3. Примечание. Условие Линдберга $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sum\limits_1^n b_0'}{B_n}=1$, которым мы только что воспользовались, является, как известно, условием, необходимым и достаточным * для применимости предельной теоремы порядка $p=2$.

* Для случая $p>2$ согласно вышесказанному необходимое и достаточное условие также может быть представлено в виде (11), аналогичном условию Линдберга.

Но, как я показал ([1]) в 1926 г., предельная теорема может быть приложима даже и тогда, когда B_n не существует (стр. 12 и 23 указанной работы), а именно (привожу дословный перевод данной мной формулировки *: «Пусть ε_k означает вероятность неравенства $|x_k| > L$. Если, выбирая соответствующим образом L, возможно осуществить одновременно $\sum\limits_1^n \varepsilon_k \to 0$ и $\frac{L^2}{B_n} \to 0$, где дисперсия B_n вычислена в предположении, что $|x_k| \leqslant L$, то предельная теорема применима». Позднее (в 1935 г.) В. Феллер ([2]) получил эквивалентный результат и кроме того доказал, что указанное условие является также и необходимым (если величины x_i пренебрегаемы и имеют 0 общей медианой). Таким образом, если мое условие выполнено, дисперсия B'_n, вычисленная (укороченная) указанным способом, может быть меньше B_n также и тогда, когда B_n существует; поэтому $p < 2$ при $\frac{B'_n}{B_n} < 1$. Вследствие леммы I, если B_n существует, $\frac{B'_n}{B_n} > x > 0$, то порядок $p < 2$ предельной теоремы будет тогда сколь угодно близок к двум; в этом случае $\frac{\text{М. О.} |S_n|^p}{(\sqrt{B_n})^p} \to R_p$ для любого $p < 2$. Если B_n не существует **, то максимум $p_0 \leqslant 2$ порядка предельной теоремы (достигаемый или нет) равен максимуму степени p, для которой М. О. $\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p$ ограничено и может таким образом принимать любые значения $p_0 (0 \leqslant p_0 \leqslant 2)$. Условию применимости предельной теоремы данного порядка $p < 2$ можно также придать форму, аналогичную условию Ляпунова.

Теорема. Пусть $\tau = \frac{L}{\sqrt{B'_n}} > 0$ произвольно малое число, где B'_n — укороченная дисперсия, соответствующая $|x_k| \leqslant L$; пусть $C^*_{k,p} = \underset{|x_k|>L}{\text{М. О.}} |x_k|^p$ содержит лишь значения $|x_k| > L$; в таком случае для применимости предельной теоремы данного порядка p необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\sum\limits_1^n C^*_{k,p}}{(B'_n)^{\frac{p}{2}}}$. (Условие необходимости предполагает величины x_i пренебрегаемыми и имеющими 0 общей медианой.)

Поступило
28 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Math. Annal., **97** (1926), [2] W. Feller, Math. ZS., **40** (1935).

* На стр. 23-й эта теорема распространена и доказана для почти независимых величин.

** В примере, который был рассмотрен в моей работе, порядок p предельной теоремы имеет недостигаемым максимумом 2; согласно произведенному там вычислению $B'_n \sim \frac{6n \log n}{\pi}$; поэтому, например М. О. $|S_n| \sim R_1 \sqrt{B'_n}, \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{3n \log n}$.