Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. М. ШАПИРО

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VI 1939)

Настоящая заметка имеет целью осветить некоторые вопросы теории собственных значений с точки зрения алгебраических структур[1]. Если речь идет о собственных значениях симметрической матрицы, то совпадение двух собственных значений влечет за собой появление множества собственных векторов надлежащей размерности. Аналогичный факт имеет место в общей теории собственных значений, с той однако разницей, что там роль размерности играет другой числовой инвариант — *категория* (2). Область объектов, к которым применяется теория, в том и другом случае представляет собой с алгебраической точки зрения структуру, элементами которой являются линейные подпространства, замкнутые множества или замкнутые семейства кривых. При этом каждому элементу структуры поставлено в соответствие некоторое число (максимум квадратичной формы на данном линейном подпространстве, максимум некоторой функции на данном замкнутом множестве или максимум длины кривой на данном семействе), которое можно рассматривать, как норму элемента. Норма удовлетворяет условию монотонности, т. е. возрастает при возрастании элемента. Собственные значения при этом определяются, как нижние грани норм элементов, удовлетворяющих известному условию, наложенному на размерность или категорию. Это определение собственных значений сохраняет свой смысл для любой нормированной структуры, для которой определена числовая характеристика, являющаяся обобщением размерности или категории; такую числовую характеристику мы будет называть рангом элемента структуры[2].

В настоящей заметке будет показано, что те последствия, которые появляются в различных структурах в случае совпадения двух собственных значений, коренятся в одном общем свойстве нормированных структур.

Мы рассматриваем структуру, в которой существует «первый» элемент 0, и для всякой пары a, b, где $a \subset b$, существует хотя бы один дополнительный элемент x, для которого

$$a + x = b, \ ax = 0.$$

Предположим, что каждому элементу a структуры отнесены два вещественных числа: его *ранг* $\rho(a)$ и его *норма* $\nu(a)$.

Относительно ранга ρ мы примем:

$$\rho(a + b) \leqslant \rho(a) + \rho(b).$$

[1] Определение и основные свойства структур см., например, в (1) или (1a).

[2] Понятие ранга в несколько более узком смысле имеется у Менгера (3); ср. также (4–6).

Относительно нормы $\nu(a)$ примем:

$$\text{при } a \supset b \quad \nu(a) \geqslant \nu(b).$$

Введем понятие о сумме бесконечного множества элементов структуры. Под суммой бесконечного множества элементов будем разуметь наименьший элемент (если он существует), содержащий все данные элементы([1].

Пусть теперь выделено некоторое множество *отличных от нуля* элементов, которые будем называть особыми (или собственными) элементами; относительно этих элементов будем предполагать, что всякое множество особых элементов, содержащихся в каком-либо определенном элементе структуры, имеет сумму.

Рассмотрим множество всех элементов структуры, имеющих ранг $\geqslant \rho$. Нижнюю грань норм элементов этого множества обозначим через c_ρ. Число c_ρ будем называть собственным значением структуры, соответствующим индексу ρ.

Элемент ранга $\geqslant \rho$, имеющий норму c_ρ, называется минимальным элементом (порядка ρ). Предположим, что выполняется следующая «аксиома существования»: для каждого минимального элемента a существует по крайней мере один особый элемент g такой, что g входит в a (т. е. $g \subset a$).

Теперь можно высказать теорему: если имеет место равенство

$$c_\rho = c_{\rho+\sigma}$$

и $a_{\rho+\sigma}$ есть минимальный элемент порядка $\rho+\sigma$, то сумма всех особых элементов, входящих в $a_{\rho+\sigma}$, имеет ранг $> \sigma$.

Докажем теорему. Пусть s—сумма всех особых элементов, входящих в $a_{\rho+\sigma}$.

Тогда $s \subset a_{\rho+\sigma}$, следовательно существует элемент t такой, что $st = 0$,

и

$$a_{\rho+\sigma} = s + t.$$

Допустим теперь, что $\rho(s) \leqslant \sigma$.

Имеем

$$\rho(s+t) \leqslant \rho(s) + \rho(t),$$

следовательно, должно быть $\rho(t) \geqslant \rho$.

С другой стороны

$$\nu(t) \leqslant \nu(a_{\rho+\sigma}),$$

$$\nu(a_{\rho+\sigma}) = c_{\rho+\sigma} = c_\rho.$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$\nu(t) = c_\rho,$$

т. е. t есть минимальный элемент. Но тогда t содержит особый элемент, т. е. $st \neq 0$, что невозможно. Поэтому ранг элемента s должен быть больше σ.

В частности, если ранг любого элемента есть целое число (как это имеет место во многих приложениях), то мы получаем $\rho(s) \geqslant \sigma + 1$.

Поступило
25 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Glivenko, Théorie générale des structures, Paris (1938). [1a] В. Гливенко, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта, I, 3—33 (1937). [2] Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Тополог. методы в вариац. задачах, М. (1930). [3] K. Menger, Jahresb. d. D. Mathem. Ver., **37**, 309—325 (1928). [4] Birkhoff, Garrett, Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **29**, 441—464 (1933). [5] V. Glivenko, Amer. Journ. of Math., **58**, 799—828 (1936). [6] J. von Neumann, Proc. of the Nat. Acad. of Sci., **22**, 92—100 (1936).

([1] См. ([1]), стр. 44.