Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов технических специальностей
дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2023

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.11я73
З-15

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 2 от 28.09.2022 г.*)

Рецензент: доц. каф. информационно-вычислительных систем БТЭУ ПК канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. А. Воробей*

Задорожнюк, М. В.

З-15 Дифференциальное исчисление функции одной переменной : практикум по дисциплине «Математический анализ» для студентов техн. специальностей днев. формы обучения / М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2023. – 56 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-527-5.

Содержит задачи, позволяющие усвоить основные понятия дифференциального исчисления функции одной переменной, выработать навыки вычисления производных и применения производных для решения прикладных задач.

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.11я73

ISBN 978-985-535-527-5

Оглавление

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1.1. Понятие производной, геометрический и физический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Придадим переменной x приращение Δx. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (рис. 1).

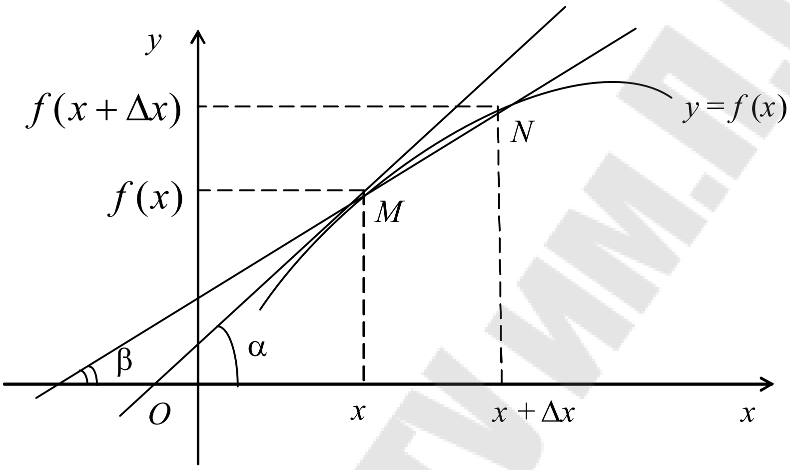


Рис. 1

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется ***производной*** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается одним из следующих символов: y'; $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если указанный предел существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной – *дифференцированием.*

Вычислим производную функции $f(x) = x^2$, пользуясь определением:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x .$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$.

Из рис. 1 видно, что $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При стремлении Δx к нулю секущая MN превращается в касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$, откуда следует ***геометрический смысл производной***: производная в точке x равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x, y)$, к графику функции $y = f(x)$.

Исходя из геометрического смысла производной, можно записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' характеризует скорость протекания этого процесса. В частности, производная от закона движения есть *мгновенная скорость в точке* – в этом состоит ***физический смысл производной***.

Если C – постоянное число, а $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования*:

1) $C' = 0$;

2) $x' = 1$;

3) $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$;

4) $\left(Cu\right)' = Cu'$

5) $\left(uv\right)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = f'_u u'_x.$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций*.

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

2. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;

3. $\left(\alpha^{u}\right)' = \alpha^{u}\ln\alpha u'$;

4. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$;

5. $(\log_{\alpha} u)' = \dfrac{1}{u\ln\alpha}u'$;

6. $(\sin u)' = \cos u u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u u'$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$;

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$;

14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u u'$;

15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u u'$;

16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}u'$;

17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u}u'$;

18. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$;

19. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 2x^4 + 5x - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{x^2}{3\sqrt{x}}$; б) $y = \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x$;

в) $y = \sin^3 2x$; г) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

Решение

1. Преобразуем функцию, воспользовавшись формулами:

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}; \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n},$$

а затем применим правила дифференцирования и таблицу производных:

$$y' = \left(2x^4 + 5x - \frac{2}{3} + 4x^{-3} + \frac{1}{3}x^{3/2}\right)' = 8x^3 + 5 - 0 + 4(-3)x^{-4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} =$$

$$= 8x^3 + 5 - \frac{12}{x^4} + \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

2. Используем таблицу производных и формулу $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = \left(\left(x^2 + 1\right)\operatorname{arctg} x\right)' = \left(x^2 + 1\right)' \operatorname{arctg} x + \left(x^2 + 1\right)\left(\operatorname{arctg} x\right)' =$$

$$= 2x \operatorname{arctg} x + \left(x^2 + 1\right)\frac{1}{1 + x^2} = 2x \operatorname{arctg} x + 1.$$

3. Находим производную:

$$y' = \left(\sin^3 2x\right)' = \left((\sin 2x)^3\right)' = 3(\sin 2x)^2 (\sin 2x)' =$$

$$= 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = 3\sin^2 2x \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cos 2x.$$

Здесь сначала взята производная степенной функции с основанием $\sin 2x$, затем – производная синуса и на последнем этапе – производная его аргумента. Нет необходимости расписывать все эти действия подробно, результат можно записать сразу, т. е. $y' = \underbrace{3\sin^2 2x}\cdot\underbrace{\cos 2x}\cdot\underbrace{2}$ (фигурными скобками выделены указанные производные).

4. Воспользуемся формулой $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$y' = \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}\right)' = \frac{\left(\ln(x^2 + 1)\right)' x^2 - \ln(x^2 + 1)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2+1} 2x \cdot x^2 - \ln(x^2+1)2x}{x^4} = \frac{\frac{2x^3}{x^2+1} - 2x\ln(x^2+1)}{x^4} =$$

$$= \frac{2}{x(x^2+1)} - \frac{2\ln(x^2+1)}{x^3}.$$

Пример 2. Записать уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{x+1}$ в точке с абсциссой $x = 3$.

Решение

Найдем ординату точки касания:

$$y(3) = \sqrt{3+1} = 2,$$

следовательно, координаты точки касания $(3; 2)$.

Так как угловой коэффициент касательной согласно геометрическому смыслу производной равен значению производной в точке касания, то найдем $y'(3)$:

$$y'(3) = \left(\sqrt{x+1}\right)'\Big|_{x=3} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}.$$

Запишем уравнение касательной согласно формуле (2):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-2),$$

или

$$2x - 8y + 3 = 0.$$

Ответ: $2x - 8y + 3 = 0$.

Задания

1. Вычислите производную функции $\left(\sqrt{x}\right)'$, пользуясь определением производной.

2. Вычислите производную функции $(\ln x)'$, пользуясь определением производной.

В заданиях 3–65 найдите производные указанных функций.

3. $y = 2x^5 + 3x^2 - 4x + 8.$

4. $y = 3x^5 - \frac{x}{5} + 2 - \sqrt{\pi}.$

5. $y=3x^3-\dfrac{x^2}{5}+0{,}5x-\ln 3.$

6. $y=\left(x^3+3\right)\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right).$

7. $y=ax^3+bx^2-cx+d.$

8. $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}+\cos 1.$

9. $y=\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{4}{x^7}-\dfrac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}-e^2.$

10. $y=\sqrt[4]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2x\sqrt{x}.$

11. $y=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{x}{7}.$

12. $y=\dfrac{x^2-\sqrt{x}-1}{2x^3}.$

13. $y=\dfrac{x^3-4\sqrt{x}+x^2+2}{x^2}.$

14. $y=\dfrac{\left(x^2-3\right)^2}{x}.$

15. $y=\dfrac{3x^2-x+5}{2}.$

16. $y=\dfrac{\cos x\cdot\arccos x}{5}.$

17. $y=\sqrt[3]{x}\left(2+x^2-\sqrt{x}\right).$

18. $y=(3x-2)\left(2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right).$

19. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

20. $y=\dfrac{2+x}{3-x}.$

21. $y=x^3\cdot 3^x.$

22. $y=x\ln x.$

23. $y=x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x.$

24. $y=\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}.$

25. $y=(3x+1)^{10}.$

26. $y=2\sin(3x+5).$

27. $y=e^{\sin 2x}.$

28. $y=\mathrm{arctg}\,e^{x/2}.$

29. $y=\left(x^3+\dfrac{1}{x}-2\right)^4.$

30. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}.$

31. $y=\sqrt{1-x^2}.$

32. $y=\log_2(x^2+2).$

33. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}.$

34. $y=(2\sqrt{2x}-3)^3.$

35. $y=\dfrac{1}{(3x+1)^2}+\sqrt[4]{\left(x^2+2x-4\right)^3}.$

36. $y=\dfrac{px-4}{(2p+x)^2}.$

37. $y=\dfrac{1}{\sin(2/x)}.$

38. $y=\sqrt[5]{\cos^2 3x}.$

39. $y=\arccos\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}.$

40. $y=\dfrac{5}{\mathrm{tg}^2\,2x}.$

41. $y=\sqrt[3]{\dfrac{5}{1+\sqrt{x}}}$.

42. $y=\sqrt{\ln(\cos 3x)}$.

43. $y=\sin^3 5x$.

44. $y=\log_6^4(1-x^3)$.

45. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x$.

46. $y=\cos x-\dfrac{\cos^3 x}{3}$.

47. $y=\log_5\log_3(2x+1)$.

48. $y=\dfrac{1}{\sin\alpha}\ln(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}\alpha)$.

49. $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

50. $y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{1+e^{4x}}\right)$.

51. $y=e^{\frac{1}{\ln 2x}}$.

52. $y=\log_3(x^2-\sin^2 x)$.

53. $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

54. $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

55. $y=\ln\ln^3\ln^2 x$.

56. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+e^{-\sqrt{x}}}}$.

57. $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{ch} 2x+\sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$.

58. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

59. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

60. $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.

61. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x)-x$.

62. $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x$.

63. $y=\dfrac{1}{24}\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^2}{16}\arcsin 2x$.

64. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+3}$.

65. $y=\ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right)-\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\operatorname{arctg}(4x-1)$.

66. Докажите, что функция $y = \ln \dfrac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению $xy' + 1 = e^y$.

67. Докажите, что функция $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y' - xy = 1$.

68. Составьте уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = 1/x$ в точке с абсциссой $x = -1/2$. (*Нормалью* к графику функции $y = f(x)$ называется перпендикуляр к касательной в точке касания.)

69. Составьте уравнение касательной к линии $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$ в точках ее пересечения с прямой $x - 2 = 0$.

70. На линии $y = x^2(x-2)^2$ найдите точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

71. На параболе $y = x^2 + 5x + 3$ взяты две точки с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей, проведенной через эти точки?

72. Составьте уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

73. Найдите угол, под которым пересекаются параболы $y = (x-2)^2$ и $y = -x^2 + 6x - 4$.

74. В уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ определите b и c, если известно, что парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.

75. Точка движется по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какие моменты времени точка была в начальном пункте? В какие моменты ее скорость равна нулю?

76. Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 3t$ и $s_2 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$. В какой момент времени их скорости будут равны?

77. Тело массой 6 т движется прямолинейно по закону $s = (t+1)^3 + \ln(t+1) - 1$. Вычислите кинетическую энергию тела через 2 *с* после начала движения.

1.2. Логарифмическое дифференцирование. Производная неявной функции и функции, заданной параметрически

Логарифмическое дифференцирование заключается в том, что сначала заданную функцию логарифмируют, а затем уже приступают к дифференцированию. Логарифмическое дифференцирование используется при нахождении производной показательно-степенной функции вида $y = u(x)^{v(x)}$. Его также целесообразно применять, когда заданная функция содержит операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. При этом используются свойства логарифмов:

$$\ln uv = \ln u + \ln v; \quad \ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \quad \ln u^p = p\ln u.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = (\cos 2x)^{\sin x}$.

Решение

Прологарифмируем данную функцию по основанию e:

$$\ln y = \ln(\cos 2x)^{\sin x}.$$

Воспользовавшись свойством логарифма $\ln u^p = p\ln u$, получим

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos 2x).$$

Продифференцируем обе части этого равенства по x, учитывая, что y есть функция аргумента x, и обращая внимание на правую часть равенства, где записано произведение двух функций:

$$(\ln y)' = (\sin x)' \cdot \ln(\cos 2x) + \sin x(\ln(\cos 2x))',$$

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln(\cos 2x) + \sin x\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2,$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos 2x) - 2\sin x \cdot \operatorname{tg} 2x.$$

Умножим обе части последнего равенства на y и, учитывая, что $y = (\cos 2x)^{\sin x}$, получим

$$y' = (\cos 2x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln(\cos 2x) - 2\sin x \cdot \operatorname{tg} 2x\right).$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^5}{x^2(3x+5)^7}}$.

Решение

Использовать правила дифференцирования для нахождения такой производной нерационально ввиду громоздкости выражения, поэтому целесообразно сначала прологарифмировать обе части равенства и применить свойства логарифма:

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x-2)^5}{x^2(3x+5)^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\frac{(x-2)^5}{x^2(3x+5)^7} = \frac{1}{3}\left(\ln(x-2)^5 - \ln x^2(3x+5)^7\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\ln(x-2) - \left(2\ln x + 7\ln(3x+5)\right)\right) = \frac{5}{3}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln x - \frac{7}{3}\ln(3x+5).$$

Затем продифференцируем обе части равенства:

$$(\ln y)' = \left(\frac{5}{3}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln x - \frac{7}{3}\ln(3x+5)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+5}\cdot 3.$$

Выразим из последнего равенства y':

$$y' = y\left(\frac{5}{3(x-2)} - \frac{2}{3x} - \frac{7}{3x+5}\right) = \sqrt[3]{\frac{(x-2)^5}{x^2(3x+5)^7}}\left(\frac{5}{3(x-2)} - \frac{2}{3x} - \frac{7}{3x+5}\right).$$

Если зависимость между переменными x и y задана уравнением $F(x, y) = 0$, то говорят, что функция $y(x)$ задана ***неявно***. Для нахождения производной y'_x такой функции дифференцируют обе части данного уравнения по x и получают уравнение относительно y'_x. Затем из этого уравнения находят y'_x.

Пример 5. Найти производную y'_x неявной функции, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 2x^2 y + 1$.

Решение

Дифференцируем обе части уравнения по переменной x. При этом важно помнить, что x – независимая переменная (а значит, ее производная $x' = 1$), а y – функция аргумента x (а значит, ее производная $y' = y'_x$). Получим:

$$3x^2 \cdot 1 + 3y^2 y'_x = 2\left(x^2 \cdot y\right)'_x + 0,$$

$$3x^2 \cdot 1 + 3y^2 y'_x = 2\left(2xy + x^2 y'_x\right) + 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Затем перенесем слагаемые, содержащие y'_x, в левую сторону и вынесем y'_x за скобки:

$$\left(3y^2 - 2x^2\right)y'_x = 4xy - 3x^2,$$

откуда

$$y'_x = \frac{4xy - 3x^2}{3y^2 - 2x^2}.$$

Функция $y(x)$ является заданной ***параметрически***, если x и y заданы как функции параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \qquad (3)$$

Пример 6. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^t, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$

Решение

Найдем x'_t и y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1 + (e^t)^2} e^t = \frac{e^t}{1 + e^{2t}};$$

$$y'_t = e^{-t}(-1) = -e^{-t}.$$

Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$y'_x = e^{-t} : \frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{e^{-t}(1+e^{2t})}{e^t} = \frac{e^{-t}+e^t}{e^t} = e^{-2t} + 1.$$

Задания

Продифференцируйте функции (задания 78–107).

78. $y = x^{x^2}$.

79. $y = (x+1)^{2/x}$.

80. $y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}}$.

81. $y = (\ln 3x)^x$.

82. $y = x^{\ln x}$.

83. $y = (\ln x)^x$.

84. $y = x^{1/x^2}$.

85. $y = (x^2+1)^{\cos 2x}$.

86. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

87. $y = x^{x^x}$.

88. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$.

89. $y = \sqrt{x \arcsin(x\sqrt{1-e^x})}$.

90. $y = \dfrac{(x+5)^3(2x+1)^4}{3x^2}$.

91. $y = \dfrac{\sqrt{x+5}(2x-1)^3}{\sqrt[3]{(4x+2)^2}}$.

92. $y = \sqrt[4]{\dfrac{(x+6)^2}{x^5(2x-5)^3}}$.

93. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

94. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

95. $x^2 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$.

96. $y = 1 + xe^y$.

97. $x^2 + y^2 = \ln(xy)$.

98. $\cos(xy) = x$.

99. $y^x = x^y$.

100. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

101. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

102. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$

103. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

104. $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

106. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$ 107. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

108. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к эллипсу $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ в точке $\left(\sqrt{2};\, 2\right)$?

109. Запишите уравнение касательной к окружности $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ в точке $(2;1)$.

110. Запишите уравнение касательной к линии $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ в начале координат.

111. Составьте уравнения касательной и нормали к астроиде $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ в точке, соответствующей параметру $t = \pi/3$.

112. Составьте уравнения касательной и нормали к циклоиде $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке, соответствующей параметру $t = \pi/3$.

113. Запишите уравнение касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярных к прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

114. По параболе $y = x(8-x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1;\, 7)$?

115. Точка движется по параболе $y = \sqrt{5x}$ так, что ее абсцисса возрастает со скоростью 10 см/с. Какова скорость изменения ординаты этой точки в момент, когда $x = 5$?

116. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

117. Сторона квадрата растет со скоростью 2 м/с. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда его сторона равна 20 м?

1.3. Производные высших порядков. Формула Лейбница

Производной второго порядка, или ***второй производной*** функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е. $(y')'$. Обозначается вторая производная одним из следующих символов:

$$y''; \; f''(x); \; \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Если $S = S(t)$ – закон движения материальной точки, то $S'(t) = \frac{dS}{dt}$ есть скорость, а вторая производная $S''(t) = v'(t) = \frac{d^2S}{dt^2}$ характеризует скорость изменения скорости, т. е. ***ускорение***.

Если функция $y = y(x)$ задана *параметрически* уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то ее вторая производная может быть вычислена по формуле

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x(t)\right)'_t}{x'_t(t)}, \tag{4}$$

где производная $y'_x(t)$ вычислена по формуле (3).

Преобразовав формулу (4), можно получить еще одну формулу для вычисления второй производной параметрически заданной функции:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t(t)y''_{tt}(t) - x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}.$$

Пример 7. Найти производную второго порядка функции $y = \operatorname{arctg} 2x$.

Решение

Вычислим первую производную:

$$y' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{1}{1+(2x)^2}2 = \frac{2}{1+4x^2}.$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{2}{1+4x^2}\right)' = 2\left(\left(1+4x^2\right)^{-1}\right)' = 2(-1)\cdot\left(1+4x^2\right)^{-2}\cdot 8x = -\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}.$$

Пример 8. Найти производную второго порядка y''_{xx}, если

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$$

Решение

Вычислим x'_t, y'_t:

$$x'_t = -2\sin 2t;$$

$$y'_t = \left(2\sec^2 t\right)' = \left(\frac{2}{\cos^2 t}\right)' = 2\left(\cos^{-2} t\right)' = 2\cdot(-2)\cos^{-3} t(-\sin t) = \frac{4\sin t}{\cos^3 t}.$$

Согласно формуле (3),

$$y'_x = \frac{\dfrac{4\sin t}{\cos^3 t}}{-2\sin 2t} = -\frac{2\sin t}{\cos^3 t\cdot 2\sin t\cos t} = -\frac{1}{\cos^4 t}.$$

Найдем $\left(y'_x\right)'_t$:

$$\left(y'_x\right)'_t = -\left(\cos^{-4} t\right)' = 4\cos^{-5} t(-\sin t) = -\frac{4\sin t}{\cos^5 t}.$$

Вычислим y''_{xx} по формуле (4):

$$y''_{xx} = \frac{-\dfrac{4\sin t}{\cos^5 t}}{-2\sin 2t} = \frac{\sin t}{\cos^5 t\cdot\sin t\cdot\cos t} = \frac{1}{\cos^6 t} = \sec^6 t.$$

Ответ: $y''_{xx} = \sec^6 t$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и вообще любого ***n-го порядка***:

$$y''' = \left(y''\right)',\ y^{\mathrm{IV}} = \left(y'''\right)',\ \ldots,\ y^{(n)} = \left(y^{\{n-1)}\right)'.$$

Пример 9. Вычислить производную n-го порядка функции $y = \ln x$.

Решение

Вычислим первую, вторую, третью и четвертую производные функции $y = \ln x$, чтобы увидеть закономерность:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2},$$

$$y''' = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3},$$

$$y^{\text{IV}} = \left(2x^{-3}\right)' = -2 \cdot 3x^{-4}.$$

Заметив, что все производные нечетного порядка положительны, а четного – отрицательны, а также тот факт, что каждый раз происходит умножение на следующее натуральное число, окончательно получаем формулу

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,x^{-n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Ответ: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

Для вычисления производной n-го порядка от *произведения* функций целесообразно использовать ***формулу Лейбница***:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} =$$

$$= C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \dots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)}, \qquad (5)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Пример 10. Найти $\left((x+1)^3 e^{2x}\right)^{(4)}$.

Решение

Обозначим $u = (x+1)^3$; $v = e^{2x}$.

Согласно формуле Лейбница,

$$(uv)^{(4)} = \sum_{k=0}^{4} C_4^k u^{(4-k)} v^{(k)} = C_4^0 u^{(4)} v + C_4^1 u''' v' + C_4^2 u'' v'' + C_4^3 u' v''' + C_4^4 u v^{(4)}.$$

Так как $C_4^0 = C_4^4 = \dfrac{4!}{0!4!} = 1,\ C_4^1 = C_4^3 = \dfrac{4!}{1!3!} = 4,\ C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6,$

то

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)} v + 4u''' v' + 6u'' v'' + 4u' v''' + u v^{(4)}. \tag{6}$$

Вычислим производные функций u и v:

$$u' = 3(x+1)^2, \qquad v' = 2e^{2x},$$

$$u'' = 6(x+1), \qquad v'' = 4e^{2x},$$

$$u''' = 6, \qquad v''' = 8e^{2x},$$

$$u^{(4)} = 0; \qquad v^{(4)} = 16e^{2x}.$$

После подстановки в формулу (6) имеем:

$$\left((x+1)^3 e^{2x}\right)^{(4)} = 0 \cdot e^{2x} + 4 \cdot 6 \cdot 2e^{2x} + 6 \cdot 6(x+1) \cdot 4e^{2x} + 4 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 8e^{2x} +$$

$$+ (x+1)^3 \cdot 16e^{2x} = 16e^{2x}\left(3 + 9(x+1) + 6(x+1)^2 + (x+1)^3\right) =$$

$$= 16e^{2x}\left(3 + 9x + 9 + 6x^2 + 12x + 6 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) =$$

$$= 16e^{2x}\left(x^3 + 9x^2 + 24x + 19\right).$$

Ответ: $\left((x+1)^3 e^{2x}\right)^{(4)} = 16e^{2x}\left(x^3 + 9x^2 + 24x + 19\right).$

Задания

В заданиях 118–123 найдите вторую производную указанных функций.

118. $y = xe^{x^2}$.

119. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

120. $y = \dfrac{1}{1 + 4x^2}$.

121. $y = 2^{\sqrt{x}}$.

122. $y = \cos^3 x$.

123. $y = x^x$.

124. Найдите производную любого порядка от функции $y = x^3 - 2x^2 + 6x - 4$ в точке $x = 2$.

В заданиях 125–123 найдите производную n-го порядка указанных функций.

125. $y = e^{ax}$.

126. $y = xe^x$.

127. $y = \sin 3x$.

128. $y = \cos 2x$.

129. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

130. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x - 6}$.

В заданиях 131–134 вычислите вторую производную функции, заданной параметрически.

131. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

132. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

133. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

134. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

В заданиях 135–138 вычислите производную n-го порядка, используя формулу Лейбница.

135. $y = xe^{3x}$.

136. $y = e^x \sin x$.

137. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

138. $y = \sin^2 x$.

139. Вычислите $\left((x^2 + 1)\sin x\right)^{(90)}$.

140. Точка движется прямолинейно, причем $s = \dfrac{2}{9}\sin\dfrac{\pi t}{2} + s_0$. Найдите ускорение в конце первой секунды (s выражено в сантиметрах, t – в секундах).

1.4. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то ее приращение Δy можно представить в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta(x), \qquad (7)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называют главную, линейную относительно Δx, часть приращения функции:

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx. \tag{8}$$

Для вычисления дифференциала применяют правила, аналогичные правилам для вычисления производных:

$$d(Cu) = Cdu,$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Пример 11. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

Решение

Согласно формуле (8) имеем:

$$dy = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{1}{1 + x^2/a^2}\cdot\frac{1}{a}dx = \frac{a}{a^2 + x^2}dx.$$

Ответ: $d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{adx}{a^2 + x^2}$.

Ввиду формулы (7) при Δx, близком к нулю, приращение функции Δy в точке x_0 можно считать приближенно равным ее дифференциалу:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Учитывая, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, окончательно получаем формулу для приближенного вычисления значения функции в точке x, близкой к точке x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{9}$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Пример 12. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{85}$.

Решение

Чтобы воспользоваться формулой (9), надо вычислить значение функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ и ее производной в точке x_0, близкой к $x=85$.

Возьмем значение $x_0=81$, так как значение функции и производной в ней легко вычислимы. Тогда

$$f(81)=\sqrt[4]{81}=3,$$

$$f'(81)=\frac{1}{4}x^{-3/4}\bigg|_{x=81}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\bigg|_{x=81}=\frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}}=\frac{1}{108}.$$

Учитывая, что $\Delta x=85-81=4$, после подстановки в формулу (9) имеем

$$\sqrt[4]{85}\approx 3+\frac{1}{108}\cdot 4\approx 3{,}037.$$

Ответ: $\sqrt[4]{85}\approx 3{,}037$.

Задания

В заданиях 141–146 вычислите дифференциалы функций.

141. $y=\dfrac{x^2+5}{2}$.

142. $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$.

143. $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$ $x>0$.

144. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+5}{x-5}}$.

145. $x^4+y^4=x^2y^2$.

146. $e^{2x+y}=\sin xy$.

В заданиях 147–152 вычислите приближенно с помощью дифференциала.

147. $\sqrt{8{,}76}$.

148. $\sqrt[3]{130}$.

149. $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

150. $\sin 35°$.

151. $(2{,}01)^3+(2{,}01)^2$.

152. $\ln \operatorname{tg} 46°$.

153. Площадь квадрата равна 81 см^2. Насколько примерно надо увеличить сторону квадрата, чтобы его площадь увеличилась: а) до 81,5 см^2; б) до 82 см^2; в) до 85 см^2?

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется производной функции в точке x?
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Запишите уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.
4. В чем заключается физический смысл производной? Второй производной?
5. Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$?
6. Как связаны дифференциал и производная?
7. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
8. Вычислите производные функций $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \ln x$; $y = e^x$, пользуясь определением производной.
9. Таблица производных.
10. Как вычислить производную сложной функции?
11. Как вычислить производную параметрически заданной функции? Вторую производную?
12. Как найти производную неявно заданной функции?
13. Что представляет собой логарифмическое дифференцирование и когда оно применяется?
14. Что называется второй производной функции $y = f(x)$? Что называется n-й производной?
15. Какой вид имеет формула Лейбница и для чего она применяется?
16. Запишите формулу, позволяющую использовать дифференциал для приближенного вычисления значения функции.

Варианты тестовых заданий представлены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты тестовых заданий

1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$; 4) $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$

2. Приращением функции $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx ее аргумента, называется выражение	1) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; 2) $\Delta y = f(x) - f(x+\Delta x)$; 3) $\Delta y = f(x) - \Delta x$; 4) $\Delta y = f(\Delta x)$
3. Какое из следующих утверждений верно: а) если функция непрерывна, то она дифференцируема; б) если функция дифференцируема, то она непрерывна; в) если функция непрерывна, то ее производная непрерывна; г) функция дифференцируема только тогда, когда она непрерывна	1) а; 2) б; 3) в; 4) г
4. Главную, линейную относительно Δx, часть приращения функции называют	1) дифференциалом; 2) производной; 3) касательной; 4) скоростью
5. Если тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ характеризует	1) пройденный путь; 2) ускорение; 3) угловую скорость; 4) мгновенную скорость
6. Если тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, то вторая производная $s''(t)$ характеризует	1) пройденный путь; 2) ускорение; 3) угловую скорость; 4) мгновенную скорость
7. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид	1) $y = x_0 + f(x_0)(x - y_0)$; 2) $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$; 3) $y = y_0(x - x_0) + f'(x_0)$; 4) $y = f'(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$
8. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 + 1$ в точке (3; 10) равен	1) 3; 2) 6; 3) 9; 4) 10
9. Производная произведения uv вычисляется по формуле	1) $(uv)' = u'v + v'u$; 2) $(uv)' = u'v'$; 3) $(uv)' = \dfrac{u'v + v'u}{v^2}$; 4) $(uv)' = u' + v'$

Окончание табл. 1

10. Производная частного $\frac{u}{v}$ вычисляется по формуле	1) $\left(\frac{u}{v}\right)' = u'v - v'u$; 2) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$; 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v' - uv}{v}$; 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
11. Дифференциал функции можно вычислить по формуле	1) $dy = f(x)dx$; 2) $dy = f'(x)dx$; 3) $dy = \frac{dx}{f'(x)}$; 4) $dy = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
12. Формула Лейбница для вычисления производной *n*-го порядка от произведения функций имеет вид	1) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n)} v^{(k)}$; 2) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(n-k)} v^{(k)}$; 3) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$; 4) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(k)}$

Глава 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

2.1. Правило Лопиталя–Бернулли

I. *Раскрытие неопределенностей вида* $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции. Если $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими или бесконечно малыми при $x \to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что предел отношения производных существует.

Если отношение производных приводит снова к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то правило Лопиталя–Бернулли применяют к этому отношению еще раз. Перед его повторным применением рекомендуется произвести все допустимые упрощения.

Пример 13. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение

Так как при $x=0$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль, то для вычисления предела воспользуемся правилом Лопиталя–Бернулли. Для этого продифференцируем числитель и знаменатель функции, стоящей под знаком предела:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{(\sin 6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{6\cos 6x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot \sin x = 0.$$

II. *Раскрытие неопределенностей вида* $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$.

С помощью алгебраических преобразований данные неопределенности можно свести к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которые впоследствии можно раскрыть, используя правило Лопиталя–Бернулли.

Так, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$

то

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(g(x)\right)^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Это же выражение можно записать по-другому:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\left(f(x)\right)^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

К обеим получившимся неопределенностям применимо правило Лопиталя–Бернулли, а выбор способа представления функции зависит от каждого конкретного примера.

Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to a} f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right).$$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1,$ то имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$, которая, как показано выше, может быть сведена к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln(x-1) = -\infty$, то имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$:

$$\lim_{x\to 1+0} \ln x \ln(x-1) = \lim_{x\to 1+0} \frac{\ln(x-1)}{(\ln x)^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 1+0} \frac{(\ln(x-1))'}{\left((\ln x)^{-1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{-(\ln x)^{-2}\dfrac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1+0} \frac{x\ln^2 x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

К полученной неопределенности вновь применим правило Лопиталя–Бернулли:

$$-\lim_{x\to 1+0} \frac{x\ln^2 x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 1+0} \frac{\left(x\ln^2 x\right)'}{(x-1)'} = -\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln^2 x + x2\ln x\dfrac{1}{x}}{1} = 0.$$

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Решение

Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$, которую, приведя разность к общему знаменателю, сведем к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, и воспользуемся правилом Лопиталя–Бернулли дважды:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sh} x}{x\operatorname{sh} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

III. *Раскрытие неопределенностей вида* (∞^0); (0^∞); (1^∞).

Неопределенности такого типа приводятся к неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ с помощью логарифмирования с применением свойств логарифма:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\ln f(x)}.$$

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{1/x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$, которую можно свести к неопределенности $(0\cdot\infty)$ с помощью тождества $u^v=e^{v\ln u}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}}.$$

Вычислим предел в показателе экспоненты при помощи правила Лопиталя–Бернулли:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{1/x}=e^0=1$.

Аналогичным образом раскрываются неопределенности вида $\left(0^0\right)$ и $\left(1^\infty\right)$.

Задания

Вычислите пределы 154–197, пользуясь правилом Лопиталя–Бернулли.

154. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

155. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^4}$.

156. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.

157. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$.

158. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

159. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{4x+4}}{\sqrt[3]{1-x^2}+2}$.

160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

161. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 6x}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

164. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-\sin x}{\cos x - x^2}$.

165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{2x^2+3x}$.

166. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(x-\pi/2)^2}$.

167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$.

169. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[3]{x+2}}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

171. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

172. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

173. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

174. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{10}\cdot e^{-x}$.

175. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt{x}\ln x$.

176. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

177. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(x+e^x)$.

178. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos 3x\cdot\operatorname{tg} 5x$.

179. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

180. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x^2-x-20}\right)$.

181. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$.

182. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{x}{2\cos x}\right)$.

183. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

184. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{1/x}$.

185. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)^{1/(1+\ln x)}$.

186. $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{2/(x^2-9)}$.

187. $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{1/(15-3x)}$.

188. $\lim\limits_{x\to +0}(\ln(x+e))^{1/x}$.

189. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

190. $\lim\limits_{x\to +0}(1+\sin x)^{1/\sqrt{x}}$.

191. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

192. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$.

193. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

194. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+x}$.

195. $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[x]{e^x+x}$.

196. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

197. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{2x}$.

2.2. Приложения производной к исследованию функций

Монотонность и локальные экстремумы функции

Монотонной на интервале $(a; b)$ называется функция, которая не возрастает (не убывает) всюду на данном интервале.

Признак монотонности функции: функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;b)$, не убывает (не возрастает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$ всюду на этом интервале.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума: если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, а ее производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (минимум).

Второе достаточное условие экстремума: если в критической точке x_0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x_0)<0$ $\left(f''(x_0)>0\right)$, то в этой точке функция имеет локальный максимум (минимум).

Пример 17. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

Вычислим производную:

$$y' = \left(\frac{x}{3} - x^{2/3}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

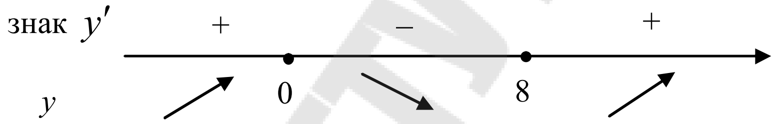
Найдем критические точки, приравняв к нулю числитель и знаменатель:

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8,$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Обе эти точки являются критическими, так как являются внутренними точками области определения функции.

3. Определим знак производной на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$; $(0; 8)$ и $(8; +\infty)$:



Вывод: функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(8; +\infty)$ и убывает на интервале $(0; 8)$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, в этой точке достигается локальный максимум, $y_{\max} = 0$. При переходе через точку $x = 8$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 8$ – точка минимума, $y_{\min} = \frac{8}{3} - \sqrt[3]{8^2} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$.

Пример 18. Выяснить, является ли точка с абсциссой $x = 0$ точкой экстремума функции $y = \cos 2x + \operatorname{ch} x$. В случае положительного ответа указать ее характер.

Решение

Так как производная указанной функции $y' = -2\sin 2x + \operatorname{sh} x$ обращается в ноль при $x = 0$, то необходимое условие экстремума функции в точке выполнено. Однако определение знака производной правее и левее точки $x = 0$ представляется затруднительным.

Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума. Найдем вторую производную функции $y''(0)$:

$$y''(0) = \left(-4\cos 2x + \operatorname{ch} x\right)\Big|_{x=0} = -4 + 1 = -3.$$

Так как вторая производная отрицательна при $x = 0$, то в этой точке функция достигает локального максимума, $y_{\max} = \left(\cos 2x + \operatorname{ch} x\right)\Big|_{x=0} = 2.$

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, на котором она непрерывна, необходимо найти критические точки, принадлежащие интервалу $(a; b)$, и вычислить значения функции в этих точках; вычислить значения функции в граничных точках отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$; из всех полученных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение

Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3).$$

Производная обращается в ноль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$, но $x_3 \notin (-1; 2)$. Следовательно, вычисляем значение функции в критических точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а также на концах отрезка. Получим:

$$f(0) = 1,\ \ f(1) = 2,$$

$$f(-1) = -10,\ \ f(2) = -7.$$

Вывод: в точке $x = 1$ функция принимает наибольшее значение – $f_{\text{наиб}} = f(1) = 2$, а в точке $x = -1$ она принимает наименьшее значение – $f_{\text{наим}} = f(-1) = -10$.

Пример 20. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность заданного радиуса R.

Решение

Обозначим стороны прямоугольника через x и y: $0 < x; y < 2R$. Тогда площадь прямоугольника можно вычислить по формуле $S = xy$. Так как прямоугольник вписан в окружность, то согласно теореме Пифагора, $x^2 + y^2 = (2R)^2$, откуда $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, а значит,

$$S = S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Найдем критические точки функции $S(x)$. Для этого вычислим ее производную:

$$S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Найдем критические точки, приравняв к нулю числитель и знаменатель полученной дроби. Получим $x = \pm R\sqrt{2}$, $x = \pm 2R$.

Единственная точка, удовлетворяющая ограничениям задачи это $x = R\sqrt{2}$. Проверкой убеждаемся, что при переходе через нее производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, точка $x = R\sqrt{2}$ доставляет максимум функции площади. При этом

$$S_{\max} = R\sqrt{2}\sqrt{4R^2 - 2R^2} = 2R^2.$$

Так как $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, то прямоугольник максимальной площади, вписанный в окружность заданного радиуса, – это квадрат.

Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Кривая ***выпукла*** **(*вогнута*)** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.

Условие выпуклости (*вогнутости*): если функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) всюду на этом интервале, то график функции выпуклый (вогнутый) на $(a;b)$.

Точка, отделяющая промежутки выпуклости и вогнутости кривой друг от друга, называется ***точкой перегиба***.

Достаточное условие существования точки перегиба: если при $x = x_0$ вторая производная функции $f(x)$ не существует или равна нулю и при переходе через $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой x_0 есть точка перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 21. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^6 - 6x^5 + 7{,}5x^4 + 3x$.

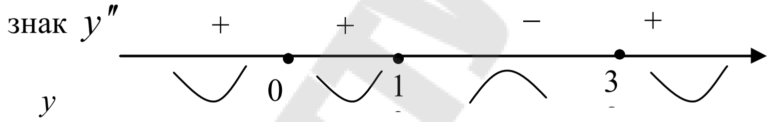
Решение

Найдем первую, а затем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(x^6 - 6x^5 + 7{,}5x^4 + 3x\right)'' = \left(6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3\right)' =$$
$$= 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2(x-1)(x-3).$$

Вторая производная обращается в ноль в точках $x_1 = 0;\ x_2 = 1$ и $x_3 = 3$. Все эти точки принадлежат области определения функции, $f(0) = 0;\ f(1) = 5{,}5;\ f(3) = 112{,}5$.

Исследуем знак второй производной:



Отсюда заключаем, что график функции является выпуклым на интервале $(1;3)$, вогнутым на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;1)$ и $(3;+\infty)$. Точки $(1;5{,}5)$ и $(3;112{,}5)$ являются точками перегиба. Точка $(0;0)$ не является точкой перегиба.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции, область значения (если это возможно), указать точки разрыва.
2. Найти асимптоты графика функции.
3. Найти точки пересечения функции с осями координат.
4. Выяснить вопрос о периодичности функции.
5. Выяснить вопрос о четности либо нечетности функции.
6. Найти промежутки монотонности и локальные экстремумы.
7. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба.
8. На основании проведенного исследования построить график функции.

Пример 22. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$.

Решение

1. Область определения.

Знаменатель обращается в ноль при $x = 1$, следовательно,

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Так как $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2}{x^3-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2}{x^3-1} = -\infty$, то прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную (горизонтальную асимптоту) в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x^3-1)x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3-1} = 0.$$

Следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ значение $y = \dfrac{0^2}{0^3-1} = 0$, значит, график пересекает ось как Oy в точке (0; 0). Решив уравнение $y = 0$, получим, что других точек пересечения с осями график не имеет.

4. Функция не является периодической.

5. Функция $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$ является функцией общего вида. Этот вывод можно сделать на основании того, что область определения несимметрична относительно начала координат, поэтому в данном случае нет необходимости проверять условия четности $\big(f(-x) = f(x)\big)$ или нечетности $\big(f(-x) = -f(x)\big)$.

6. Интервалы монотонности, точки экстремума.

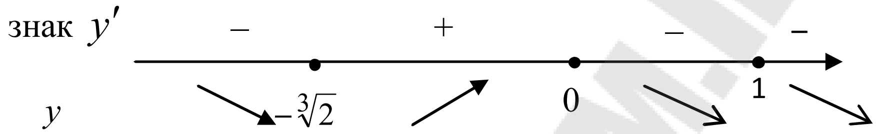
Найдем производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)'=\frac{2x(x^3-1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{-2x-x^4}{(x^3-1)^2}=\frac{-x(2+x^3)}{(x^3-1)^2}.$$

Критические точки найдем, приравняв к нулю числитель и знаменатель производной:

$$\left[\begin{array}{l}-x(2+x^3)=0,\\(x^3-1).\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}x=0 \text{ или } x=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2},\\x=1.\end{array}\right.$$

Имеем три критических точки. Определяем знаки производной:



$x=\sqrt[3]{-2}\approx -1,3,\quad y=\dfrac{\left(\sqrt[3]{-2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3-1}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\approx -0,5$, следовательно, $\left(\sqrt[3]{-2};-0,5\right)$ – точка минимума, $(0;0)$ – точка максимума.

7. Точки перегиба, интервалы выпуклости (вогнутости) найдем при помощи второй производной:

$$y''=\left(\frac{-2x-x^4}{\left(x^3-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(-2-4x^3\right)\left(x^3-1\right)^2-\left(-2x-x^4\right)\cdot 2\left(x^3-1\right)\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(x^3-1\right)\left(-2x^3-4x^6+2+4x^3+2x+12x^3+6x^6\right)}{\left(x^3-1\right)^4}=\frac{2x^6+14x^3+2x+2}{\left(x^3-1\right)^3}.$$

Приравняв к нулю числитель и знаменатель, найдем критические точки второго порядка:

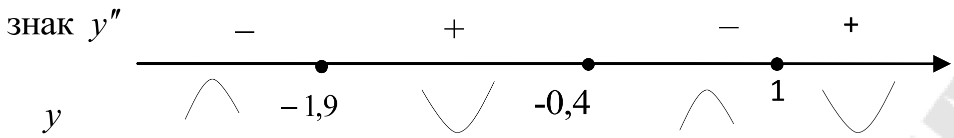
$$\left[\begin{array}{l}2x^6+14x^3+2x+2=0,\\(x^3-1)^3=0.\end{array}\right.$$

Получаем

$$x_1=1,\ x_2\approx -0,4,\quad x_3\approx -1,9.$$

Здесь первое уравнение решено приближенно.

Определим знак второй производной:



Следовательно, $x \approx -0{,}4$; $x \approx -1{,}9$ являются точками перегиба, в точке $x = 1$ перегиба нет, так как в ней функция не определена.

Найдем ординаты точек перегиба, чтобы зафиксировать их на графике:

$$f(-0{,}4) \approx -0{,}15; \quad f(-1{,}9) \approx -0{,}5.$$

8. Строим график функции (рис. 2).

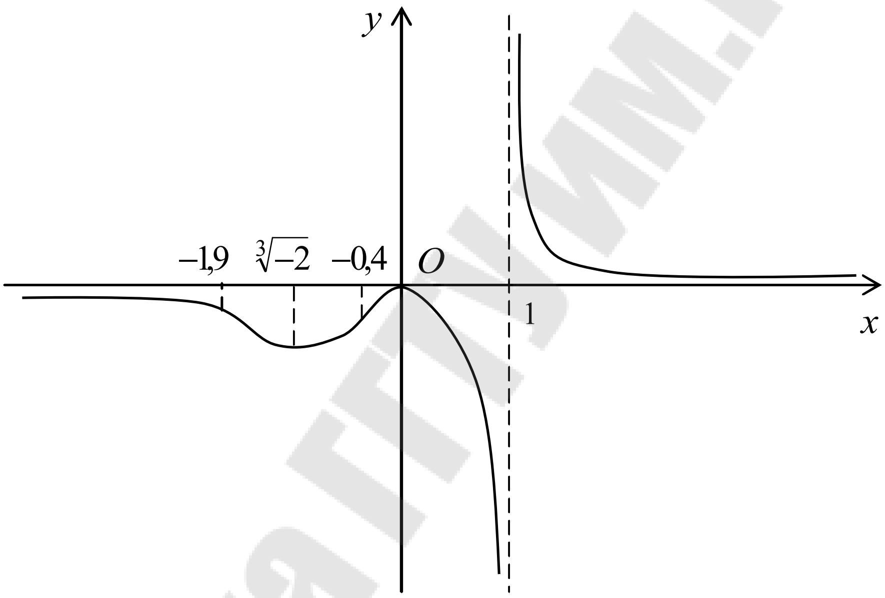


Рис. 2

Задания

В заданиях 198–205 определить интервалы монотонности функции, укажите характер точек экстремума.

198. $y = x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)$.

199. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$.

200. $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 3$.

201. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

202. $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

203. $y = 2x^2 - \ln x$.

204. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

205. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$.

В заданиях 206–209 исследуйте поведение функции в окрестности заданной точки, используя второе достаточное условие экстремума.

206. $y=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$, $x_0=2$.

207. $y=6e^{x-2}-x^3-3x^2-6x$, $x_0=2$.

208. $y=\sin^2(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.

209. $y=x^2-2x-(x-1)\ln x$, $x_0=1$.

209. $y=x^2-2x-(x-1)\ln x$, $x_0=1$.

В заданиях 210–215 указать интервалы выпуклости (вогнутости) графиков функции, найти точки перегиба.

210. $y=3x^5-5x^4+3$.

211. $y=(x+2)^5-2x+2$.

212. $y=\ln(1+x^2)$.

213. $y=xe^{2x}+1$.

214. $y=x+\dfrac{4}{x+2}$.

215. $y=5x-\sqrt[4]{(x-1)^9}$.

В заданиях 216–221 найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанных промежутках.

216. $y=x+2\sqrt{x}$, $[0;4]$.

217. $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $[-1;2]$.

218. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $[0;4]$.

219. $y=3\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1;5]$.

220. $y=\sin 2x-x$, $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

221. $y=x^x$, $0{,}1\le x<+\infty$.

В заданиях 222–237 провести полное исследование функций и построить графики.

222. $y=32x^2(x^2-1)^3$.

223. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

224. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

225. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

226. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$.

227. $y=\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$.

228. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+2)^2}$.

229. $y=x^2e^{-x}$.

230. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

231. $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

232. $y = 3\ln\frac{x}{x-3} - 1.$

233. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}.$

234. $y = e^{\sqrt{2}\sin x}.$

235. $y = \ln(\sin x + \cos x).$

236. $y = -\mathrm{arctg}(\cos x).$

237. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

238. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 14 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

239. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+1}$-ю часть курса, а забывает $\frac{t}{16}$-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

240. Проволокой, длина которой 5 м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

241. Дан эллипс $4x^2 + 9y^2 = 36$, в который вписан прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

242. Из круглого бревна диаметра d вырезана балка прямоугольного сечения, оказывающая наибольшее сопротивление на изгиб. Найдите ширину и высоту сечения (сопротивление на изгиб пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты).

243. Города A и B находятся на противоположных берегах реки ширины 1 км. Расстояние между городами вдоль берега равно 5 км. Человеку нужно добраться из A в B за минимальное время. Под каким углом он должен пересечь реку, если известно, что скорость движения по суше в 2 раза больше скорости движения по воде?

244. Какой наибольший объем может иметь правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1см?

245. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

246. Человек стоит напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз человека на 1,2 м, высота картины – 1,5 м. На каком расстоянии от стены должен стоять человек, чтобы видеть картину под наибольшим углом?

247. На расстоянии a друг от друга в точках A и B расположены источники света силы p и q соответственно. Найдите точку $M \in AB$,

освещенную меньше всего (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

248. Каналы шириной a и b соответственно соединены под прямым углом друг к другу. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

Вопросы для самоконтроля

1. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

2. Раскрытие неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$.

3. Раскрытие неопределенности вида $(\infty - \infty)$.

4. Раскрытие неопределенностей вида (0^0), (∞^0) и (1^∞).

5. Сформулируйте определение возрастающей на интервале $(a; b)$ функции.

6. Сформулируйте определение невозрастающей на интервале $(a; b)$ функции.

7. Сформулируйте определение точки максимума (минимума).

8. Какие точки называются точками экстремума функции?

9. Какие точки называются критическими?

10. Сформулируйте признак монотонности функции на интервале $(a; b)$.

11. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции в точке.

12. В чем заключается первое достаточное условие экстремума функции в точке? Второе достаточное условие?

13. Как найти точки экстремума функции?

14. Как найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке?

15. Какая кривая назывется выпуклой (вогнутой) на интервале $(a; b)$?

16. Сформулируйте определение точки перегиба.

17. Сформулируйте критерий выпуклости (вогнутости) функции на интервале $(a; b)$.

18. Сформулируйте достаточное условие существования перегиба в точке.

19. Перечислите основные пункты исследования функции для построения ее графика.

Варианты тестовых заданий представлены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты тестовых заданий

1. Если функция $y = f(x)$ не убывает на интервале $(a;b)$, то на этом интервале	1) $f'(x) = 0$; 2) $f''(x) \le 0$; 3) $f'(x) \ge 0$; 4) $f(x) \ge 0$
2. Если функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$, то на этом интервале	1) $f'(x) = 0$; 2) $f''(x) \le 0$; 3) $f'(x) \ge 0$; 4) $f(x) \ge 0$
3. Если на интервале $(a;b)$ производная положительна, то функция на этом интервале	1) выпукла; 2) постоянна; 3) возрастает; 4) убывает
4. Если на интервале $(a;b)$ производная равна нулю, то функция на этом интервале	1) выпукла; 2) постоянна; 3) возрастает; 4) убывает
5. Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то $x = x_0$ является	1) точкой перегиба; 2) точкой минимума; 3) точкой максимума; 4) точкой разрыва
6. Если точка $x = x_0$ является точкой минимума, то	1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) > 0$; 3) $f'(x_0) < 0$; 4) $f(x_0) = 0$
7. Что можно сказать о точке $x = x_0$, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$?	1) x_0 – точка перегиба; 2) x_0 – точка минимума; 3) x_0 – точка максимума; 4) x_0 – точкой разрыва
8. Если функция выпукла вниз на интервале $(a;b)$, то на этом интервале	1) $f''(x) < 0$; 2) $f'(x) > 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f''(x) > 0$
9. Если вторая производная на интервале $(a;b)$ отрицательа, то на этом интервале функция	1) возрастает; 2) убывает; 3) выпукла; 4) вогнута
10. Если меняет знак вторая производная при переходе через точку $x = x_0$ меняет знак с минуса на плюс, то	1) x_0 – точка перегиба; 2) x_0 – точка минимума; 3) x_0 – точка максимума; 4) x_0 – точкой разрыва

ТИПОВОЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Продифференцируйте функции:

а) $y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{x^3}{3} - \sqrt[3]{x^7}$; в) $y = x^5 \arcsin\sqrt{x}$;

б) $y = \ln^3(x + \cos 3x)$; г) $y = (x^2 + 4x)^x$.

2. Вычислите производную неявно заданной функции:

$$y^2 = e^{3y} + \ln\frac{x}{y}.$$

3. Вычислите первую и вторую производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \sqrt{1+t^2}. \end{cases}$$

4. Вычислите приближенно с помощью дифференциала $\operatorname{tg} 65°$.

5. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln\left(x^2 - 4x + 4\right)$ в точке $x_0 = 1$.

6. Вычислите пределы, пользуясь правилом Лопиталя–Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3} - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 3x - 10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$.

7. Для функции $y = \frac{9x}{9 + x^2}$ найдите:

а) промежутки монотонности, точки экстремума;

б) наибольшее и наименьшее значения на отрезке [–2; 3].

8. Найдите промежутки выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$.

Решение

1. Прежде чем дифференцировать, преобразуем функцию:

$$y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{x^3}{3} - \sqrt[3]{x^7} = 6x^{-4} - 3x^{-1} + \frac{1}{3}x^3 - x^{7/3};$$

$$y' = \left(6x^{-4} - 3x^{-1} + \frac{1}{3}x^3 - x^{7/3}\right)' = -24x^{-5} + 3x^{-2} + \frac{3}{3}x^2 - \frac{7}{3}x^{4/3} =$$

$$= -\frac{24}{x^5} + \frac{3}{x^2} + x^2 - \frac{7}{3}x^{4/3}.$$

Найдем производную сложной функции $y = \ln^3(x + \cos 3x) = \left(\ln(x + \cos 3x)\right)^3$:

$$y' = 3\left(\ln(x + \cos 3x)\right)^2 \cdot \frac{1}{x + \cos 3x}\left(1 - \sin 3x \cdot 3\right) =$$

$$= 3\left(\ln(x + \cos 3x)\right)^2 \cdot \frac{1 - 3\sin 3x}{x + \cos 3x}$$

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = \left(x^5 \cdot \arcsin\sqrt{x}\right)' = \left(x^5\right)' \arcsin\sqrt{x} + x^5\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 5x^4 \cdot \arcsin\sqrt{x} + x^5 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 5x^4 \cdot \arcsin\sqrt{x} + \frac{x^5}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= 5x^4 \cdot \arcsin\sqrt{x} + \frac{x^4\sqrt{x}}{2\sqrt{1 - x}}.$$

Вычислим производную показательно-степенной функции $y = (x^2 + 4x)^x$, используя логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln(x^2 + 4x)^x = x\ln(x^2 + 4x),$$

$$\left(\ln y\right)' = x' \cdot \ln(x^2 + 4x) + x\left(\ln(x^2 + 4x)\right)',$$

$$\frac{1}{y}y' = 1 \cdot \ln(x^2 + 4x) + x\frac{1}{x^2 + 4x}(2x + 4) = \ln(x^2 + 4x) + \frac{2x(x + 2)}{x^2 + 4x}.$$

Выразим y':

$$y' = \left(\ln(x^2 + 4x) + \frac{2x(x + 2)}{x^2 + 4x}\right)y = \left(\ln(x^2 + 4x) + \frac{2x(x + 2)}{x^2 + 4x}\right)(x^2 + 4x)^x.$$

2. Для того чтобы найти производную неявно заданной функции, воспользуемся свойством логарифма частного, а затем продифференцируем обе части равенства:

$$\left(y^2\right)' = \left(e^{3y} + \ln\frac{x}{y}\right)' = \left(e^{3y} + \ln x - \ln y\right)',$$

$$2yy' = e^{3y} \cdot 3y' + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}y'.$$

Сгруппируем слагаемые с производной:

$$2yy' - e^{3y} \cdot 3y' + \frac{1}{y}y' = \frac{1}{x},$$

$$y'\left(2y - 3e^{3y} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x},$$

$$y'\frac{2y^2 - 3e^{3y} + 1}{y} = \frac{1}{x},$$

$$y' = \frac{y}{x(2y^2 - 3e^{3y} + 1)}.$$

3. Вычислим производную y'_x по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$:

$$y'_t = \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x'_t = \frac{1}{1+t^2},$$

откуда

$$y'_x = \frac{t/\sqrt{1+t^2}}{1/(1+t^2)} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(1+t^2) = t\sqrt{1+t^2}.$$

Найдем вторую производную по формуле $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x(t)\right)'_t}{x'_t(t)}$:

$$\left(y'_x(t)\right)'_t = \left(t\sqrt{1+t^2}\right)' = 1 \cdot \sqrt{1+t^2} + t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1+t^2+t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{\left(1+2t^2\right)/\sqrt{1+t^2}}{1/(1+t^2)} = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}(1+t^2) = \left(1+2t^2\right)\sqrt{1+t^2}.$$

4. Воспользуемся формулой

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

где $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$, $f(x_0) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\Delta x = 5° = \frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}$.

Найдем производную:

$$f'(x_0) = (\operatorname{tg} x)'\Big|_{x=\pi/3} = \frac{1}{\cos^2(\pi/3)} = 4.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 65° \approx \sqrt{3} + \frac{4\pi}{36} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{9} \approx 2{,}08$.

5. Угловой коэффициент касательной к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$ равен значению производной в этой точке:

$$y'(1) = \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\bigg|_{x=1} = -2.$$

Ордината точки касания равна $y(1) = \ln 1 = 0$. Подставив полученные значения в уравнение касательной (2), окончательно имеем

$$y = 0 - 2(x-1),$$

или

$$2x + y - 2 = 0.$$

Нормаль перпендикулярна касательной, следовательно, ее угловой коэффициент равен $-\frac{1}{y'(x_0)}$, а само уравнение нормали имеет следующий вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Подставив все вычисленные выше значения, получим уравнение

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x-1),$$

или

$$x - 2y - 1 = 0.$$

6. Этот предел представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, следовательно, можно сразу применить правило Лопиталя–Бернулли:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x^2-1}}{x^2+3x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{0-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x}{2x+3}=\frac{-x}{(2x+3)\sqrt{x^2-1}}=-\frac{2}{7\sqrt{3}}.$$

Для вычисления этого предела применим логарифмирование:

$$\lim_{x\to0}(\sin x)^{x^2}=\left(0^0\right)=\lim_{x\to0}e^{\ln(\sin x)^{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{x^2\cdot\ln(\sin x)}=e^{(0\cdot\infty)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin x)}{x^{-2}}}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-2x^{-3}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ctg}x\cdot x^3}{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{-2\operatorname{tg}x}}=e^{\frac{1}{2}\left|\lim\limits_{x\to0}\right|^{\frac{x^3}{\operatorname{tg}x}}}=$$

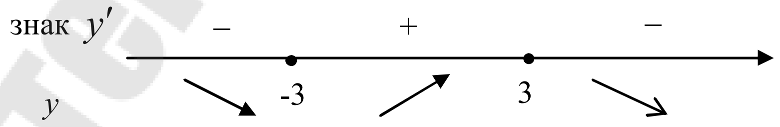
$$=\left[\operatorname{tg}x\sim x\right]=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{-2}}=e^0=1.$$

7. Вычислим производную и найдем критические точки функции:

$$y'=\left(\frac{9x}{9+x^2}\right)'=\frac{9\left(9+x^2\right)-9x\cdot2x}{\left(9+x^2\right)^2}=\frac{81-9x^2}{\left(9+x^2\right)^2}=\frac{9\left(9-x^2\right)}{\left(9+x^2\right)^2}.$$

Очевидно, имеем две критических точки, $x_1=3;\quad x_2=-3$.

Определим знаки производной:



Функция убывает на интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$ и возрастает на интервале $(-3;3)$. В точке $x=3$ функция достигает локального максимума: $y_{\max}=\frac{9\cdot3}{9+3^2}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}$, в точке $x=-3$ – локального минимума: $y_{\min}=-\frac{3}{2}$.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [0; 5] нужно сравнить значения функции на концах отрезка и в критических точках внутри него. Имеем:

$$f(0)=\left.\frac{9x}{9+x^2}\right|_{x=0}=0;\ \ f(5)=\frac{45}{34};\ \ f(3)=\frac{3}{2}.$$

Очевидно, наименьшее значение достигается при $x=0$, наибольшее – при $x=3$.

Для нахождения точки перегиба найдем вторую производную заданной функции:

$$y'=\left(x+2-\sqrt[3]{x^5}\right)'=1-\frac{5}{3}x^{2/3},$$

$$y''=\left(1-\frac{5}{3}x^{2/3}\right)'=-\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=-\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Функция имеет одну критическую точку второго порядка: $x=0$. Проверкой убеждаемся, что при $x<0$ вторая производная положительна, а значит, на интервале $(-\infty;0)$ кривая вогнута, а при $x>0$ вторая производная отрицательна, а значит, на интервале $(0;+\infty)$ кривая выпукла. Так как при переходе через точку $x=0$ вторая производная меняет знак и функция определена в этой точке, то $x=0$ является точкой перегиба.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Вариант 1

1. Вычислите производные:

а) $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \dfrac{4}{(x-4)^2}$; б) $y = \left(4^{\operatorname{tg} x} - 2x^2\right)^3$;

в) $y = \ln(1 + \arccos\sqrt{x})$; г) $y = \ln\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}$;

д) $y = (\ln 2x)^{\sin x}$; е) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \dfrac{8}{3}$;

ж) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x$.

2. Найдите производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$$

3. Запишите уравнения касательной и нормали кривой $y = \dfrac{x^3+2}{x^3-2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

4. Найдите производную пятого порядка от функции $y = \left(x^2 + 3x + 1\right)e^{3x+2}$, используя формулу Лейбница.

5. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя–Бернулли:

а) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{6 - \sqrt{6 - 10x}}{9 - x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x \sin\dfrac{10}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0}(\sin 2x)^x$.

6. Провести исследование и построить график функции $y = -\dfrac{8x}{x^2+4}$.

Вариант 2

1. Вычислите производные:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

б) $y=\left(2^{\operatorname{tg} x}-\arcsin 2x\right)^2$;

в) $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{3x-1}{3x+1}}$;

д) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$;

е) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

ж) $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

2. Найдите производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1). \end{cases}$$

3. Запишите уравнения касательной и нормали кривой $y=8\sqrt[4]{x}-70$ в точке с абсциссой $x_0=16$.

4. Найдите производную третьего порядка от функции $y=e^{x/2}\sin 2x$, используя формулу Лейбница.

5. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя–Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$;

г) $\lim\limits_{x\to +0}(1+\sin x)^{1/\sqrt{x}}$.

6. Провести исследование и построить график функции $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

Вариант 3

1. Вычислите производные:

а) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$; б) $y = \left(4^{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x\right)^2$;

в) $y = \ln(\arcsin\sqrt{x})$; г) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{3x-4}{3x+4}}$;

д) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$; е) $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}}$;

ж) $y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5}\cdot\operatorname{arctg}(3x-2) - \ln\left(3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5}\right)$.

2. Найдите производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg}\left(2e^t\right), \\ y = \ln\operatorname{tg}\left(e^t\right). \end{cases}$$

3. Запишите уравнения касательной и нормали кривой $y = x + \sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Найдите производную четвертого порядка от функции $y = e^{-2x}\sin(2+3x)$, используя формулу Лейбница.

5. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя – Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\dfrac{x}{3x-1} - \dfrac{1}{\ln 3x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\operatorname{tg}\pi x}$.

6. Провести исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Вариант 4

1. Вычислите производные:

а) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{4x+3}}$; б) $y=\left(e^{\sin x}-\cos x\right)^6$;

в) $y=\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}$;

д) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$; е) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$;

ж) $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

2. Найдите производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{t+1}. \end{cases}$$

3. Запишите уравнения касательной и нормали кривой $y=6\sqrt[3]{x}-\dfrac{16}{3}\sqrt[4]{x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

4. Найдите производную пятого порядка от функции $y=\left(2x^3+1\right)\cos x$, используя формулу Лейбница.

5. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя – Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\cdot e^{-x})$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/(1+\ln x)}$.

6. Провести исследование и построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Вариант 5

1. Вычислите производные:

а) $y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{\sqrt{3x^2-5x+1}}$;   б) $y=(5-x^2\operatorname{arctg})^2$;

в) $y=\cos\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\ln x}$;   г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}$;

д) $y=(\ln x)^{\arcsin x}$;   е) $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$;

ж) $y=2x-\ln(1+\sqrt{1-e^{4x}})-e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$.

2. Найдите производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$$

3. Запишите уравнения касательной и нормали кривой $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right)$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

4. Найдите производную четвертого порядка от функции $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$, используя формулу Лейбница.

5. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя–Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sin\dfrac{b}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$;   г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^x+5\right)^{\frac{1}{5x}}$.

6. Провести исследование и построить график функции $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$.

ОТВЕТЫ

68. $4x+y+4=0$; $2x-8y-15=0$. **69.** $x-4y+\pi-2=0$. **70.** $(0;0)$; $(1;1)$; $(2;0)$. **71.** $(0{,}5;\,5{,}75)$. **72.** $3x+y+6=0$. **73.** $\operatorname{arctg}(6/7)$. **74**. $b=-3$; $c=4$. **75.** 0; 8; 0; 4; 8. **76.** 2. **77.** 216 кДж. **108.** $-\sqrt{2}$. **109.** $x+3y-5=0$. **110.** $y=x$. **111.** $x\sqrt{3}+y-\sqrt{3}=0$; $x-y\sqrt{3}+2=0$. **112.** $x\sqrt{3}-y+6-\pi\sqrt{3}=0$; $x+y\sqrt{3}-\pi=0$. **113.** $2x-y+1=0$; $2x-y-1=0$. **114.** 9. **115.** 5 см/с. **116.** $(-4;-4)$. **117.** 8 м/с; 80 м^2/с. **140.** $\approx -0{,}548$ см/с^2. **153.** а) $\approx 0{,}28$ мм; б) $\approx 0{,}56$ мм; в) $\approx 2{,}22$ мм. **154.** $1/3$. **155.** $-1/4$. **156.** $5/4$. **157.** m. **158.** $3\sqrt{5}/5$. **159.** $-1/4$. **160.** a^2/b^2. **161.** $1/6$. **162.** a^2/b^2. **163.** 1. **164.** -1. **165.** $\frac{\ln 5}{3}$. **166.** ∞. **167.** $1/2$. **168.** 2. **169.** 0. **170.** -2. **171.** $1/2$. **172.** $a/\sqrt{b}$. **173.** 2. **174.** 0. **175.** 0. **176.** a. **177.** 2. **178.** $-3/5$. **179.** 0. **180.** ∞. **181.** $-1/2$. **182.** ∞. **183.** $1/6$. **184.** 1. **185.** e. **186.** e^{-1}. **187.** $e^{1/3}$. **188.** $e^{1/e}$. **189.** 1. **190.** 1. **191.** 1. **192.** 1. **193.** $e^{3/2}$. **194.** 1. **195.** e^2. **196.** $e^{-1/2}$. **197.** $e^{8/3}$. **238.** 1,96 м. **239.** 3. **240.** 1,25 м. **241.** $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. **242.** $d\sqrt{3}/3$; $d\sqrt{6}/3$. **243.** 60°. **244.** $1/6$. **245.** $4R/3$. **246.** 1,8 м. **247.** $\dfrac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$. **248.** $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

Ответы к тестовым заданиям

Стр. 24: 1Б; 2А; 3Б; 4А; 5Г; 6Б; 7Б; 8Б; 9А; 70Г; 11Б; 3Б.

Стр. 43: 1В; 2В; 3В; 4Б; 5Б; 6А; 7Б; 8Г; 9В; 10А.

Литература

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – СПб. : Лань, 2016. – 492 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2013. – Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. – 304 с.

4. Герасимович, А. И. Математический анализ : справ. пособие : в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989. – 287 с.

5 Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский[и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 349 с.

6. Кузнецов, В. А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие / В. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1983. – 175 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Задорожнюк Мария Викторовна
Евтухова Светлана Михайловна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практикум по дисциплине «Математический анализ» для студентов технических специальностей дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *О. С. Ковалёва*
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 29.12.23.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,24.
Изд. № 3.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель