Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

ЛУ-КИНГ-ХУА

К ОДНОЙ ЛЕММЕ И. М. ВИНОГРАДОВА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 VI 1939)

Следующая лемма была недавно доказана И. М. Виноградовым (1). Пусть P достаточно большое целое число. Тогда

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} \right|^r d\alpha_1 \dots d\alpha_n \ll P^{r - \frac{1}{2} n (n+1)}$$

для наибольшего четного r, удовлетворяющего неравенству

$$r < L\, n\, (n+1)\, (n+2) \log n,$$

где значения $L = L_n$ даны в следующей таблице:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\geqslant 14$
L	4.81	4.45	4.34	4.30	4.29	4.23	4.22	4.18	4.16	4.15	4.14	4.12	4.10

Этот весьма важный результат имеет многочисленные приложения, так например, в проблеме Варинга, проблеме Тарри, а также в оценках тригонометрических сумм. В настоящей заметке мы покажем, как можно улучшить этот результат для малых значений n. Именно, для $n \leqslant 10$ и

$$s = 2n = 2^t \left(\frac{1}{2}\, t\, (t+1)\, (t+2) - n \right) + 2^{t+1} (t+2) + \dots + 2^{n-1} n$$

[где t — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{2}(t+1)(t+2) \geqslant n$] мы имеем

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} \right|^s d\alpha_1 \dots d\alpha_n \ll P^{s - \frac{1}{2} n(n+1) + \varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$, причем константа в «$\ll$» зависит только от n и ε.

Для сравнения приводим следующую таблицу значений r и s:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	80	293	721	1 453	2 582	4 148	6 318	9 092	12 464
s	6	18	48	126	316	758	1 776	4 074	9 188

Метод доказательства в основном базируется на моей предыдущей заметке ([2]) с некоторой, весьма сложной, модификацией. С помощью метода, аналогичного примененному И. М. Виноградовым, можно, по всей вероятности, доказать целый ряд новых результатов.

Отметим, что для $2t > \frac{1}{2} n(n+1)$ мы имеем, наоборот,

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \right|^{2t} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \gg P^{2t - \frac{1}{2} n(n+1)}.$$

Доказательство этого результата весьма просто и ведется следующим образом:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \right|^{2t} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \gg$$

$$\gg \int_0^{P^{-n}} d\alpha_n \ldots \int_0^{P^{-1}} d\alpha_1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \right|^{2t} =$$

$$= \int_0^{P^{-n}} d\alpha_n \ldots \int_0^{P^{-1}} d\alpha_1 \left(\left| \int_0^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} dx \right|^{2t} + O(P^{2t-1}) \right)^{(3)} =$$

$$= P^{2t - \frac{1}{2} n(n+1)} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} dx \right|^{2t} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n + O(P^{2t-1-\frac{1}{2} n(n+1)}) \gg$$

$$\gg P^{2t - \frac{1}{2} n(n+1)}.$$

В действительности мы можем даже дать асимптотическую формулу для

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \right| d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Китай

Поступило
14 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Мат. сборн., нов. сер., 3, 435—470 (1938). [2] Quarterly jour. of Math., **9**, 199—202 (1938). [3] Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, X (1937).