Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 4

ГИДРАВЛИКА

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ В ПЛОСКОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 1 VI 1939)

При решении задач о движении грунтовых вод в земляных плотинах обычно бывает необходимо построить годограф скорости. Рассмотрев конечное число возможных случаев при таком построении, обычно удается выделить единственно возможную конфигурацию [1]. Однако, если годограф скорости имеет надрезы (фиг. 1 и 2), иногда бывает не вполне ясно, какой надрез надо брать. В одном из наиболее сложных примеров Девисон [[1], стр. 323] высказывает по этому поводу некоторые предположения, не давая, впрочем, полного исследования задачи. Пользуясь идеей непрерывности, мы здесь рассматриваем некоторые примеры указанного характера.

В земляной плотине с наклонными откосами обычно глубина воды в верхнем бьефе бывает малой по сравнению с длиной основания плотины, и в этом случае депрессионная кривая (линия свободной поверхности) имеет точку перегиба. Спрашивается, будет ли точка перегиба оставаться на депрессионной кривой при подъеме воды в верхнем бьефе, и если она при некоторой высоте воды исчезнет, то каким будет в дальнейшем годограф скорости? Для простейшего случая — дренированной плотины на непроницаемом основании (фиг. 1) — мы получаем следующую картину. При малых значениях $\frac{h}{l}$ имеется точка перегиба B. Годограф скорости представляет собой многоугольник $EDCBAE$. При увеличении $\frac{h}{l}$ точка B приближается к точке C и для некоторого определенного значения $\frac{h}{l}$ совпадает с C. При дальнейшем увеличении $\frac{h}{l}$ образуется надрез CB_1, который увеличивается, и при $\frac{h}{l}\to\infty$ точка B_1 стремится к бесконечности. Если закрепить h, уменьшая l до нуля, так что точка E плотины будет стремиться к точке D, то в предельном случае от годографа скорости остается лишь треугольник $EACB_1$, верхняя же часть годографа отпадает.

Для рассматриваемого на фиг. 1 движения нетрудно, пользуясь известным методом Кирхгоффа [2], найти решение. Предположим, что область движения отображена конформно на верхнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного t так, что точки E, A, B,

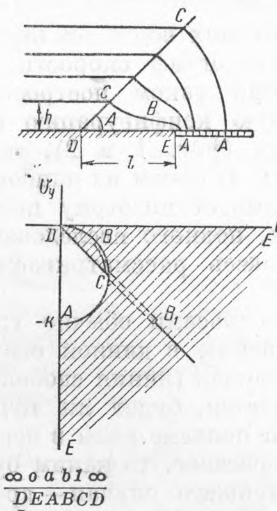
C, D перешли соответственно в точки $t=o$, a, b, 1, ∞. Тогда для комплексной координаты $z=x+iy$ и комплексного потенциала $f=\varphi+i\psi$ (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока) получим такие выражения в функции t:

$$z=C_1\int\limits_0^t \frac{\displaystyle\int\limits_0^t \frac{(b-t)\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}+\alpha}\sqrt{t\,(a-t)}}}{\sqrt{t\,(a-t)\,(1-t)}}\,dt+l, \tag{1}$$

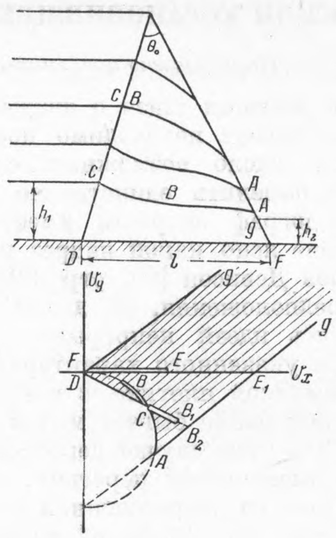
$$f=C_2\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{t\,(a-t)\,(1-t)}}+C. \tag{2}$$

Здесь $\alpha=\frac{\theta}{\pi}$, где θ — угол между откосом и основанием плотины.

В формулах для z и f имеем четыре постоянных, подлежащих определению: C_1, C_2, a и b (C можно выбрать произвольно).



Фиг. 1


Фиг. 2

Для их определения имеем следующие уравнения:

$$C_1\int\limits_\infty^0 F(t)\,dt=l, \tag{3}$$

$$C_1\int\limits_1^\infty F(t)\,dt=-h\,(\operatorname{cotg}\pi\alpha+i), \tag{4}$$

$$\frac{C_1}{C_2}\int\limits_0^a \Phi(t)\,dt=-\frac{i}{k}, \tag{5}$$

$$\frac{C_1}{C_2}\int\limits_0^1 \Phi(t)\,dt=\frac{1}{k}\,(\operatorname{tg}\pi\alpha-i), \tag{6}$$

где

$$F(t)=\frac{\int\limits_0^t \Phi(t)\,dt}{\sqrt{t(a-t)(1-t)}}, \qquad \Phi(t)=\frac{b-t}{(1-t)^{\frac{1}{2}+\alpha}\sqrt{t(a-t)}}.$$

Эти формулы годятся как для $b<1$, так для $b>1$. В том случае, когда точка B совпадает с C, b станет равным единице, и у нас останется лишь три неизвестных: C_1, C_2 и a при четырех уравнениях (3)—(6).

Следовательно, в этом случае между параметрами h, l и α (которые мы в общем случае должны считать заданными) должно выполняться некоторое соотношение. Разделив (6) на (5) и сократив мнимые члены, получим такое равенство:

$$\operatorname{tg}\pi\alpha=\frac{I_2}{I_1}, \tag{7}$$

где

$$I_1=\int\limits_0^a \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{t(a-t)}}\,dt, \quad I_2=\int\limits_a^1 \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{t(t-a)}}\,dt.$$

Из уравнения (7) найдем при заданном α корень a, лежащий между нулем и единицей, и, подставив его в формулы (3) и (4), разделим (4) на (3). После преобразований найдем:

$$\frac{h}{l}=\frac{\sin\theta\int\limits_1^\infty \frac{I\sec\theta+\int\limits_1^t \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{t(t-a)}}\,dt}{\sqrt{t(t-a)(t-1)}}\,dt}{\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\int\limits_t^0 \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{|t|(t-a)}}\,dt}{\sqrt{|t|(a-t)(1-t)}}\,dt}. \tag{8}$$

Уравнение (8) определяет то значение $\frac{h}{l}$, при котором исчезает точка перегиба. В отделе прикладных методов анализа Математического института Академии Наук СССР научным сотрудником М. Д. Тахтамышевой были произведены вычисления по формулам (7) и (8) для $\theta=\frac{\pi}{4}$ и $\theta=\frac{\pi}{16}$.

Получились такие результаты:

$$\theta=\frac{\pi}{4}, \quad a=0.1145, \quad \frac{h}{l}=1.16\sin\theta=0.820;$$

$$\theta=\frac{\pi}{16}, \quad a=0.7452, \quad \frac{h}{l}=1.19\sin\theta=0.232.$$

Рассмотрим (с качественной стороны) еще один пример изменения годографа скорости. На фиг. 2 имеем плотину с наклонными откосами, угол между которыми θ_0 меньше прямого. h_1 и h_2—глубины воды в верхнем и нижнем бьефах, l — длина непроницаемого основания. Если $\frac{h_1 - h_2}{l}$ мало, то на годографе скорости имеем точку B, соответствующую точке перегиба свободной поверхности. При возрастании $\frac{h_1 - h_2}{l}$ B стремится к C; затем вместо надреза CB появится надрез CB_1, который при полном заполнении плотины перейдет в отрезок CB_2, причем часть CB_2A отпадет. Если $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, то на годографе точки C и A совпадут, надрез CB_1 станет невозможным, точка перегиба всегда существует кроме предельного случая — полного заполнения плотины, когда точка B сольется с C. Если $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, то всегда — и при полном подъеме воды — будет существовать свободная поверхность, на которой имеется точка перегиба. Годограф скорости будет все время иметь надрез AB по дуге окружности (точка C на годографе будет ниже точки A).

Если $h_2 = 0$, т. е. в нижнем бьефе не будет воды, то точка E годографа займет положение E_1, и верхняя часть годографа отпадет ([3]).

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
3 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович, С. Г. Михлин, В. В. Девисон, Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, Изд. Акад. Наук СССР (1938). [2] V. V. Wedernikow, ZAMM, **17**, H. 3 (1937). [3] П. Я. Полубаринова-Кочина, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., (1939).