Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. И. ЛУРЬЕ и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО-СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ([1]

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 6 V 1939)

3. Изгиб парой. Имеем:

$$\begin{gathered}\sigma_0^{33}=-\frac{M}{I_2}x_1;\quad \sigma_0^{11}=\sigma_0^{12}=\sigma_0^{13}=\sigma_0^{23}=0;\\ u_0^1=\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda}{\mu(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{M}{I_2}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{M}{I_2}x_3^2;\\ u_0^2=\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}x_1x_2;\quad u_0^3=-\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}x_1x_3.\end{gathered}\tag{1}$$

Для первого приближения уравнения равновесия в объеме и на боковой поверхности имеют обычный вид соответствующих уравнений в декартовых координатах. Уравнения (17) первого сообщения в этом случае дают:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{11}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}+\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{M}{I_2}x_2x_3,\\ \sigma_1^{22}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\frac{\partial u_1^2}{\partial x_2},\\ \sigma_1^{33}&=\lambda\vartheta_1+2\mu\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3}-\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{M}{I_2}x_2x_3,\\ \sigma_1^{12}&=\mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1}\right)-\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{M}{I_2}x_1x_3,\\ \sigma_1^{13}&=\mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1^3}{\partial x_1}\right)-\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{M}{I_2}x_1x_2,\\ \sigma_1^{23}&=\mu\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1^3}{\partial x_2}\right)+\frac{7\lambda+4\mu}{4(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{M}{I_2}x_1^2+\frac{\lambda}{4(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{M}{I_2}x_2^2+\frac{\lambda+\mu}{2(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{M}{I_2}x_3^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Условия интегрируемости системы (2) имеют в данном случае вид:

$$\left.\begin{gathered}\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_1^2}+\Delta\sigma_1^{11}=0;\quad \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_2^2}+\Delta\sigma_1^{22}=0;\\ \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_3^2}+\Delta\sigma_1^{33}=0;\quad \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_1\partial x_2}+\Delta\sigma_1^{12}=0;\\ \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_1\partial x_3}+\Delta\sigma_1^{13}=0;\\ \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2S_1}{\partial x_2\partial x_3}+\Delta\sigma_1^{23}=\frac{M}{I_2}\cdot\frac{5\lambda+3\mu}{3\lambda+2\mu};\\ S_1=\sigma_1^{11}+\sigma_1^{22}+\sigma_1^{33};\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.\end{gathered}\right\}\tag{3}$$

([1] См. ДАН, XXIV, № 1 и 3 (1939). В иностранном издании «Докладов» настоящая статья напечатана в № 3 т. XXIV, а предшествовавшая ей работа этих же авторов (вып. 3, т. XXIV русского издания) помещена в № 2 т. XXIV иностранного издания.

Искомые напряжения представим в виде:

$$\sigma_1^{ik} = {}^1\sigma_1^{ik} + {}^2\sigma_1^{ik},$$

причем ${}^2\sigma_1^{11} = {}^2\sigma_1^{22} = {}^2\sigma_1^{12} = 0$; ${}^2\sigma_1^{13}$ и ${}^2\sigma_1^{23}$ не зависят от x_3. Для напряжений ${}^2\sigma_1^{ik}$ первые четыре уравнения (3) удовлетворяются тождественно, а оставшиеся дают:

$$\Delta({}^2\sigma_1^{13}) = 0, \quad \Delta({}^2\sigma_1^{23}) = \frac{M}{I_2} \cdot \frac{5\lambda + 3\mu}{3\lambda + 2\mu}. \tag{4}$$

Все уравнения равновесия для ${}^2\sigma_1^{ik}$ удовлетворяются тождественно, за исключением

$$\frac{\partial({}^2\sigma_1^{13})}{\partial x_1} + \frac{\partial({}^2\sigma_1^{23})}{\partial x_2} = 0, \qquad {}^2\sigma_1^{13}\nu_1 + {}^2\sigma_1^{23}\nu_2 = 0. \tag{5}$$

Уравнениям (5) можно удовлетворить, полагая:

$${}^2\sigma_1^{13} = \frac{M}{I_2} \cdot \frac{5\lambda + 3\mu}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \qquad {}^2\sigma_1^{23} = \frac{M}{I_2} \cdot \frac{5\lambda + 3\mu}{3\lambda + 2\mu}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1^2\right). \tag{6}$$

Из (4) и (5) следует, что ψ можно считать гармонической функцией, удовлетворяющей на контуре условию

$$\psi = \frac{1}{6}x_1^3. \tag{8}$$

Например, в случае эллипса с полуосями a и b

$$\psi = \frac{a^2}{6(a^2 + 3b^2)}(x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 3b^2x_1).$$

Система напряжений ${}^1\sigma_1^{ik}$ удовлетворяет уравнениям, формально тождественным с обычными уравнениями теории упругости в декартовой системе координат при отсутствии объемных и поверхностных сил.

Условия на торце для этой системы напряжений, как показывают вычисления, имеют вид:

$$\iint {}^1\sigma_1^{31}do = 0; \quad \iint {}^1\sigma_1^{32}do = M; \quad \iint {}^1\sigma_1^{33}do = 0; \quad \iint x_1\,{}^1\sigma_1^{33}do = 0;$$

$$\iint x_2\,{}^1\sigma_1^{33}do = 0; \quad \iint (x_1\,{}^1\sigma_1^{32} - x_2\,{}^1\sigma_1^{31})\,do = \frac{M}{I_2}B,$$

где

$$B = \iint (x_1^2 + x_2^2)\,x_1 do + \frac{5\lambda + 3\mu}{3\lambda + 2\mu}\iint\left(x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{1}{2}x_1^3\right)do.$$

Эти условия показывают, что разыскание системы напряжений ${}^1\sigma_1^{ik}$ формально эквивалентно задаче Сен-Венана об изгибе силой M, направленной по оси x_2, в сечении $x_3 = l$ и кручении моментом $\frac{M}{I_2}B$, решение которой общеизвестно ([1]).

Ленинградский индустриальный институт

Поступило 10 V 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, стр. 379 (1935).