Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Т. САРЫМСАКОВ

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 V 1939)*

В настоящей заметке, пользуясь идеей, заимствованной из теории вероятностей, я указываю асимптотический закон распределения вещественных корней колеблющихся интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка. Как будет видно ниже, законы распределения, рассматриваемые нами здесь, носят скорее всего статистический характер (охватывая при этом только одномерный случай), тогда как распределения, рассматривавшиеся до сих пор другими авторами, насколько мне известно, были большей частью локально геометрическими. Вывод закона распределения корней в существенном опирается на теорему, являющуюся уточнением известной теоремы Штурма из теории линейных уравнений второго порядка. В качестве примеров рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка, которым удовлетворяют классические полиномы Чебышева, Лежандра, Эрмита и Лягерра. Отмечу еще, что законы распределения корней последних были получены мною в неопубликованной еще кандидатской работе другим путем, а именно применением кривых распределения К. Пирсона. Идея применения этого метода принадлежит моему учителю проф. В. Романовскому. Однако следует указать еще и на то, что исследованию корней указанных полиномов были посвящены работы ряда других авторов ([1], [2], [3] и др.).

Приведу уточнение теоремы Штурма.

Теорема 1. *Если корни интегралов уравнений*

$$y'' + a^2 y = 0, \tag{1}$$

$$z'' + b^2 z = 0 \tag{2}$$

*(где $b > a > 0$) отделяют друг от друга в некотором интервале и если дано уравнение*

$$u'' + \varphi(x)\, u = 0, \tag{3}$$

*в котором: a) $a^2 \leqslant \varphi(x) \leqslant b^2$* для *$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, b) $\varphi(x)$ — непрерывная функция в интервале $(\alpha, \beta)$, то корни любого интеграла уравнения (3)* *отделяют корни интегралов уравнений* (1) *и* (2) *в интервале* ($\alpha \leqslant x \leqslant \beta$), *за исключением, быть может, одного промежутка между двумя последовательными корнями интеграла уравнения* (1), *где будет два корня интеграла уравнения* (3).

Следствие. Имеет место следующее соотношение: $r = q + \varepsilon$, где $r$ — число корней любого интеграла уравнения (3) в интервале $(\alpha, \beta)$, $q$ — число корней любого интеграла уравнения (2) в том же интервале и $\varepsilon$ равно одному из чисел: $-1, 0, +1$.

Это следствие используется вообще при доказательстве следующей теоремы, поэтому оно здесь приводится.

Назовем затем двойной предел

$$\psi(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(t, t + \Delta t)}{n} \tag{4}$$

законом распределения корней интеграла уравнения (3), где $n$ обозначает число корней интеграла уравнения (3) и $N_n(t, t + \Delta t)$ — число корней того же интеграла в интервале $(t, t + \Delta t)$.

Тогда мы будем иметь:

Теорема 2. *Если в некотором конечном интервале* $(a, b)$ ([1] *число вещественных корней любого интеграла уравнения* (3) *достаточно велико и известно, и если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна и положительна в* $(a, b)$, *то асимптотический закон распределения этих корней в интервале* $(a, b)$ *дается формулой*

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi n} \sqrt{\varphi(x)}\,, \tag{5}$$

*где* $n$ — *число корней интеграла уравнения* (3) *в* $(a, b)$.

Доказательство. Предположим $b > a > 0$, ибо это не влияет на общность доказательства. Далее составим уравнения:

$$u'' + \varphi(\alpha)\, u = 0, \tag{6}$$

$$u'' + \varphi(\beta)\, u = 0 \qquad a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b \tag{7}$$

и рассмотрим случай монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ в интервале $(\alpha, \beta)$. Затем выберем числа $\alpha$ и $\beta$ таким образом, чтобы корни интегралов уравнений (6) и (7) отделяли друг друга в интервале $(\alpha, \beta)$.

Возможность построения уравнений (6) и (7), удовлетворяющих этим условиям, следует из непрерывности функции $\varphi(x)$ и произвольности чисел $\alpha$ и $\beta$.

В силу монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ в интервале $(\alpha, \beta)$ имеем:

$$\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(\beta), \text{ при } \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

Теперь, применяя теорему 1 и ее следствие к уравнениям (3), (6) и (7), легко можно определить при помощи несложных вычислений число корней интеграла уравнения (3) в интервале $(\alpha, \beta)$. Обозначая это число через $N_n(\alpha, \beta)$, мы получим:

$$N_n(\alpha, \beta) = \left[ \frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{\varphi(\beta)} \right] + \varepsilon \text{ ([2]}, \tag{8}$$

где $\varepsilon$ принимает одно из значений: $-1, 0, 1, 2$.

([1] Заметим, что концы интервала в некоторых случаях могут изменяться в зависимости от числа корней, расположенных в $(a, b)$.

([2] $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превышающее $x$.

Остается определить двойной предел (4).

Для этого наложим в (8) $\alpha = x$, $\beta = x + \Delta x$ и, подставляя их в двойной предел (4), получим:

$$y = \frac{1}{\pi n} \sqrt{\varphi(x)}, \tag{5}$$

что требовалось доказать.

В случае монотонного убывания функции $\varphi(x)$ доказательство проводится дословно так же, только в этом случае число $N_n(\alpha, \beta)$ будет равно

$$\left[\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{\varphi(\beta)}\right] + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1$ принимает одно из следующих значений: $-1, 0, 1, 2, 3$.

Применяя эту теорему к дифференциальным уравнениям полиномов Чебышева, Лежандра, Эрмита и Лягерра, получим предельный закон распределения

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1) \tag{9}$$

для полиномов Чебышева и Лежандра и асимптотические законы:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi n} \sqrt{2n + 1 - x^2} \qquad \left(-1 < \frac{x}{\sqrt[3]{2n+1}} < 1\right), \tag{10}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi(2n+1)} \sqrt{\frac{4n+2}{x} - 1}, \qquad \left(0 < \frac{x}{4n+2} < 1\right) \tag{11}$$

для полиномов Эрмита и Лягерра соответственно.

Средне-Азиатский государственный университет
Ташкент

Поступило
28 V 1939

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Bottema, Proc. Royal. Acad. Amsterdam, XXXIV (1931). [2] F. Zernike, ibidem. [3] M. Webster, Duke, Math. Journal, 3, № 3 (1937). [4] Spenser, Duke, Math. Journal, 3, № 4 (1937).