Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

С. ЛОЗИНСКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ FEJÉR'a

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 V 1939)

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная вещественная функция вещественного переменного x, заданная на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть $x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \ldots x_n^{(n)}$ суть нули n-го полинома Чебышева $T_n(x) = \cos(\mathrm{n} \arccos x)$. Обозначим через $L_n(x) = L_n(f; x)$ интерполяционный полином Lagrange'а порядка $\leqslant n-1$, удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2 \ldots n). \tag{1}$$

Обозначим через $\overline{L}_n(x) = \overline{L}_n(f; x)$ интерполяционный полином Hermite'а порядка $\leqslant 2n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$\overline{L}_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

$$\overline{L}_n'(x_k^{(n)}) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n). \tag{3}$$

Полиномы $L_n(x)$ и $\overline{L}_n(x)$ определяются единственным образом. Известно, что предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{4}$$

вообще говоря, не имеет места, но что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(x) = f(x) \qquad \text{равномерно при } -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Соотношение (5) доказано Fejér'ом [1].

2. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leqslant 1$ и пусть $z_1, z_2 \ldots z_n$ суть корни n-ой степени из 1

$$z_s = e^{\frac{2\pi i s}{n}} \qquad (s = 1, 2 \ldots n). \tag{6}$$

Пусть $L_n(z) = L_n(f; z)$ есть полином Lagrange'а, порядка $\leqslant n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$L_n(z_s) = f(z_s) \qquad (s = 1, 2 \ldots n), \tag{7}$$

а $\overline{L}_n(z)=\overline{L}_n(f;\,z)$ есть полином Hermite'а порядка $\leqslant 2n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$\overline{L}_n(z_s)=f(z_s)\quad (s=1,2\,\ldots\,n),\tag{8}$$

$$\overline{L}_n'(z_s)=0\quad (s=1,2,\ldots\,n).\tag{9}$$

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} L_n(z)=f(z)\quad \text{при}\quad |z|<1,\tag{10}$$

причем сходимость равномерна во всяком круге $|z|\leqslant\rho<1$; известно также, что на круге $|z|=1$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_n(z)=f(z),$$

вообще говоря, не имеет места (1).

По аналогии с результатом Fejér'а, приведенным выше и относящимся к вещественному интервалу, можно было бы ожидать, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(z)=f(z)$$

равномерно при $|z|\leqslant 1$. Ниже будет доказано, что это предположение неверно, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть k — целое число, $k\geqslant 2$, $f(z)$ регулярна в $|z|<1$, непрерывна в $|z|\leqslant 1$. Обозначим через $\overline{L}_n(z)=\overline{L}_n(f;\,z)$ тот единственным образом определенный полином порядка $\leqslant kn-1$, который удовлетворяет условиям*

$$\overline{L}_n(z_s)=f(z_s)\quad (s=1,2\,\ldots\,n),\tag{11}$$

$$\overline{L}_n^{(m)}(z_s)=0\quad (s=1,2\,\ldots\,n,\quad m=1,2\,\ldots\,k-1).\tag{12}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(z)=f(z)\quad \textit{при}\quad |z|<1,$$

причем сходимость равномерна при $|z|\leqslant\rho<1$. На круге $|z|=1$ последовательность $\overline{L}_n(z)$ может расходиться.

3. Доказательство этой теоремы основано на некоторых асимптотических оценках, которые мы приведем сейчас без доказательства.

Введем следующее обозначение:

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{1+z+\ldots+z^{n-1}}\,.\tag{13}$$

При этом имеет место асимптотическая оценка:

$$\left[\frac{d^m}{dz^m}\{\varphi_n(z)\}^k\right]_{z=1}=0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-m}\right]\quad (m=0,1,2\,\ldots\,k-2)\tag{14}$$

$$\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{\varphi_n(z)\}^k\right]_{z=1}=\frac{(-1)^{k-1}}{n}(k-1)\,!+0\left(\frac{1}{n^2}\right).\tag{15}$$

Отметим еще неравенства:

$$\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{z^n-1}{z-z_s}\right|^p\leqslant\frac{1}{2}\pi^2 n^p\quad (p \text{ целое }\geqslant 2,\ |z|\leqslant 1).\tag{16}$$

Полином $\overline{L}_n(z)$, упомянутый в теореме, имеет вид:

$$\overline{L}_n(z)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{z^n-1}{z-z_s}\right)^k\left\{\left(\frac{z-z_s}{z^n-1}\right)^k_{z=z_s}+\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z-z_s}{z^n-1}\right)^k\right]_{z=z_s}(z-z_s)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z-z_s}{z^n-1}\right)^k\right]_{z=z_s}(z-z_s)^{k-1}\right\}\cdot f(z_s). \qquad (17)$$

Пользуясь (14), можно получить следующую оценку:

$$\sum_{s=1}^{n}\left|\left(\frac{z^n-1}{z-z_s}\right)^k\left[\frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{z-z_s}{z^n-1}\right)^k\right]_{z=z_s}(z-z_s)^m\right|=$$

$$=\frac{1}{(1-|z|)^{k-m}}\,0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-m-1}\right] \qquad (18)$$

$$m=0,\,1\ldots k-2.$$

Из этой оценки и (15) следует та часть теоремы, которая утверждает сходимость при $|z|<1$. Пользуясь еще (16), можем написать:

$$\overline{L}_n(z)=0(1)+(1-z^n)^{k-1}L_n(z). \qquad (19)$$

Здесь $0(1)$—величина, которая остается по модулю меньше фиксированной константы при всех n и z, $|z|\leqslant 1$. Разумеется, указанная константа зависит от $f(z)$, точнее от $\max\limits_{|z|\leqslant 1}|f(z)|$.

4. Можно [2] построить функцию $f(z)$, регулярную в $|z|<1$, непрерывную в $|z|\leqslant 1$, такую, что

$$\lim_{n\to\infty}|L_{3n^3}(f;\,-1)|=+\infty.$$

Из (19) следует, что для такой функции

$$\lim_{n\to\infty}|\overline{L}_{3n^3}(f;\,-1)|=+\infty,$$

т. е. последовательность полиномов $\overline{L}_n(f;\,z)$ расходится в точке $z=-1$. Теорема доказана.

5. Представляет интерес знать, когда последовательность $L_n(f;\,z)$ сходится равномерно к $f(z)$ в $|z|\leqslant 1$. Мы приведем здесь некоторые результаты, из которых первый известен.

Пусть $f(z)$ регулярна в $|z|<1$, непрерывна в $|z|\leqslant 1$. Тогда для равномерной сходимости $L_n(f;\,z)$ к $f(z)$ в $|z|\leqslant 1$ достаточно выполнение каждого из следующих условий.

1. $f(z)$ удовлетворяет условию Lipschitz'а порядка $\alpha>0$ при $|z|=1$. Даже достаточно, чтобы $f(z)$ удовлетворяла условию Dini, т. е. чтобы

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)\log\frac{1}{\delta}=0,$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $F(\theta)=f(e^{i\theta})$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty$, где $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ — ряд Маклорена функции $f(z)$.

Аналогичное предложение принадлежит Marcinkiewicz'у [3]. Доказательство очень просто. Пусть $Q(z)$ — любой полином порядка $\leqslant n-1$.

Очевидно, что

$$L_n(z^{\nu n}Q;\, z) \equiv L_n(Q;\, z) \equiv Q(z) \qquad (\nu \geqslant 0 — \text{целое число}), \tag{20}$$

ибо в узлах интерполяции z_s полиномы $z^{\nu n}Q(z)$ и $Q(z)$ совпадают. Положим

$$Q_\nu(z) = c_{\nu n} + c_{\nu n+1}z + \ldots + c_{(\nu+1)n-1}z^{n-1} \qquad (\nu = 0, 1 \ldots).$$

Очевидно, что

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu n} Q_\nu(z). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует:

$$L_n(f;\, z) = L_n\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu n}Q_\nu;\, z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_n(z^{\nu n}Q_\nu;\, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(z).$$

Значит

$$|L_n(f;\, z) - f(z)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k - \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k\right| + \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu(z)\right| \leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

3. $f(z)$ абсолютно непрерывна на $|z| = 1$. По теореме Hardy-Littlewood'a ([2]) ряд Маклорена для $f(z)$ в этом случае сходится абсолютно, а тогда результат следует из (2). Это условие (3) в частности выполнено, если $f(z)$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на область, ограниченную спрямляемой кривой Jordan'a.

Институт математики и механики
Ленинградского университета

Поступило
28 V 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Fejér, Nachrichten der Wissenschaftlichen Gesellschaft zu Göttingen (1916); ibidem 1918). [2] Hardy-Littlewood, Some new properties of Fourier constants, Mahematische Annalen, 97, S. 159—209. [3] Marcinkiewicz, Studia Mathematica, VI.