Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VI 1939)

В настоящей заметке мы даем решение проблемы эквивалентности [1, 2] для сингулярных уравнений, содержащих главное значение интеграла типа Коши. Такое уравнение можно привести к виду

$$\varphi(x)-\frac{\lambda b(x)}{\pi}\int\limits_C \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy=f(x). \tag{1}$$

Мы будем считать, что $b(x)$ удовлетворяет условию Lipschitz'а, а контур C — замкнутый, простой, с кривизной, удовлетворяющей условию Hölder'а. Тогда левая часть уравнения (1) есть линейный в L_2 оператор. Под $f(x)$ мы будем понимать сумму известной функции из L_2 и вполне-непрерывного в L_2 оператора. Наконец λ — численный параметр.

В комплексной плоскости λ проведем кривые

$$\lambda=\pm\frac{i}{b(x)}. \tag{2}$$

Области, на которые кривые (2) разбивают плоскость λ, могут быть трех типов: область D_0, содержащая точку $\lambda=0$; область D_∞, содержащая $\lambda=\infty$, и наконец области $D^{(n)}$, не содержащие ни той, ни другой точки [1,2]. Область D_0, также как и D_∞, симметрична относительно начала координат; каждой области $D^{(n)}$ соответствует некоторая область $D^{(n)}$, симметричная с $D^{(n')}$ относительно начала.

Нами было показано [1,2], что при $\lambda\in D_0$ и $\lambda\in D_\infty$ уравнение (1) эквивалентно уравнению Фредгольма. Здесь мы дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы такое эквивалентное уравнение Фредгольма существовало при $\lambda\in D^{(n)}$.

Положим

$$m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\ln\frac{1+i\lambda b(x)}{1-i\lambda b(x)}. \tag{3}$$

Число m — целое; в каждой из областей D оно остается постоянным. В областях D_0 и D_∞ $m=0$.

Лемма. *Пусть $L\varphi$ — линейный в L_2 оператор. Допустим, что существует линейный в L_2 оператор M такой, что уравнение*

$$ML\varphi=MF \tag{4}$$

есть уравнение Фредгольма, эквивалентное уравнению

$$L\varphi = F, \tag{5}$$

каково бы ни было F. Тогда число линейно-независимых решений уравнения $L\varphi=0$ не меньше числа линейно-независимых решений уравнения $\bar{L}\omega=0$, где $\bar{L}$ — оператор, сопряженный с L.

1. Если уравнение (5) разрешимо, то F ортогонально к решениям уравнения $\bar{L}\omega=0$. Действительно

$$(F, \omega) = (L\varphi, \omega) = (\varphi, \bar{L}\omega) = 0.$$

2. Пусть φ_k $(k=1\ 2, \ldots n)$ — линейно-независимые решения уравнения $L\varphi=0$, а ψ_k $(k=1, 2 \ldots n)$ — решения уравнения $\overline{(ML)}\psi = \bar{L}\bar{M}\psi = 0$. Для того чтобы уравнение (4) или, что то же, уравнение (5) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы

$$(MF, \psi_k) = (F, \bar{M}\psi_k) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что

$$\bar{M}\psi_k = \bar{\varphi}_k \tag{6}$$

суть решения уравнения $\bar{L}\omega=0$.

3. Уравнение $\bar{L}\omega=0$ не имеет решений, линейно-независимых с $\bar{\varphi}_k$. Если

$$\bar{L}\omega_0 = 0,\ (\omega_0, \bar{\varphi}_k) = 0,\ \omega_0 \not\equiv 0,$$

то уравнение

$$L\varphi = \omega_0$$

одновременно неразрешимо в силу п. 1 и разрешимо в силу п. 2.

Теорема. *Для того чтобы уравнение* (1) *было эквивалентно некоторому уравнению Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы число m было неотрицательным.*

Если $m=0$, то, следуя Карлеману ([3]), находим

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1+\lambda^2 b^2(x)} + \frac{\lambda e^{\omega(x)} b(x)}{\pi\sqrt{1+\lambda^2 b^2(x)}} \int\limits_C \frac{e^{-\omega(y)} f(y)}{\sqrt{1+\lambda^2 b^2(y)}} \cdot \frac{dy}{y-x}, \tag{7}$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \ln \frac{1+i\lambda b(y)}{1-i\lambda b(y)} \cdot \frac{dy}{y-x}. \tag{8}$$

Пусть теперь $m \neq 0$. Мы можем считать, что контур C — окружность $|z|=1$. К этому всегда можно свести дело простой заменой переменных. Имеем

$$\ln \frac{1+i\lambda b(x)}{1-i\lambda b(x)} = \theta(x) + m \ln x, \tag{9}$$

где $\theta(x)$ удовлетворяет условию Lipschitz'а.

Положим

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\theta(y)}{y-z} dy, \tag{10}$$

где z — произвольная точка плоскости, не лежащая на C. Обозначая индексами i и e предельные значения функции соответственно изнутри и извне контура C, будем иметь

$$e^{\psi_i(x)} = e^{\psi_e(x)} e^{0(x)}. \tag{11}$$

Отметим, что $e^{\psi(z)}$ не обращается в нуль.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\lambda b(x)}{\pi} \int\limits_C \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = 0. \tag{12}$$

Полагая по Карлеману (3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(y)}{y-z} dy = F(z) e^{\psi(z)}, \tag{13}$$

мы придем к уравнению

$$F_i(x) - x^m F_e(x) = 0. \tag{14}$$

На окружности C имеем

$$F_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad F_e(x) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k x^k. \tag{15}$$

Подставив это в (14), мы легко убедимся, что при $m < 0$ уравнение (12) имеет только тривиальное решение, а при $m > 0$ оно имеет ровно m линейно-независимых решений.

Уравнение, сопряженное с (12), можно привести к виду

$$\psi(x) + \frac{\lambda b(x)}{\pi} \int\limits_C \frac{\psi(y)}{y-x} dy = 0. \tag{16}$$

Замечая, что m меняет знак вместе с λ, мы на основании леммы заключаем, что при $m < 0$ уравнение (1) не эквивалентно уравнению Фредгольма.

Если $m > 0$, то уравнение (16) имеет только тривиальное решение. Применив к обеим частям уравнения (1) оператор, стоящий в левой части (16), мы придем к уравнению, эквивалентному (1). Из формулы Poincaré-Bertrand'a (4)

$$\frac{1}{\pi^2} \int\limits_C \frac{dt}{t-y} \int\limits_C \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = -\varphi(x) \tag{17}$$

следует, что полученное таким образом уравнение будет уравнением Фредгольма. Итак, при $m > 0$ уравнение (1) эквивалентно уравнению Фредгольма.

Рассмотрим теперь две области $D^{(n)}$, симметричные относительно начала координат. Уравнение (1) либо эквивалентно уравнению Фредгольма в обеих областях (при $m = 0$), либо эквивалентно уравнению Фредгольма в одной области и не эквивалентно в другой (при $m \neq 0$).

Поступило
16 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, XV, № 8 (1937). [2] С. Г. Михлин, Матем. сборн., 3 (45), 1, стр. 121 (1938). [3] T. Carleman, Arciv för Mathematik, Astronomi och Phisik, 16 (1922). [4] G. Bertrand, Ann. Sc. de l Ecole Norm., 40 (1923).