Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Г. К. БАДАЛЯН

ОБ УПРОЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ В ПРОБЛЕМЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 14 V 1939)

В проблеме двух неподвижных центров уравнение траектории может быть записано в виде

$$I(\lambda) = I_1(\mu) + \beta, \tag{1}$$

где

$$I(\lambda) = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-1)R(\lambda)}} \quad \text{и} \quad I_1(\mu) = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-1)S(\mu)}} \tag{2}$$

причем

$$R(\lambda) = h\lambda^2 + k^2\lambda + \alpha \quad \text{и} \quad S(\mu) = h\mu^2 + k_1^2\mu + \alpha \tag{3}$$

и где λ и μ суть эллиптические координаты движущейся точки. Связь их с прямолинейными координатами и остальные дополнительные сведения читатель найдет в ([1], [2], [3], [4]). Согласно указанному в этих статьях выбору координат и единиц измерения переменные λ и μ удовлетворяют следующим неравенствам

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \infty; \ -1 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{4}$$

Для отдельных частных типов движения эти интервалы изменения λ и μ заменяются иными интервалами, являющимися частями интервалов (4) и указываемыми нами ниже.

Задачей настоящей заметки является установление тех дробно-квадратичных подстановок вида

$$\lambda = \frac{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2}{b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2}, \qquad \mu = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2}{\beta_0 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2}, \tag{5}$$

которые приводят эллиптические интегралы (2), входящие в состав формулы (1), к нормальному лежандровому виду

$$I(\lambda) = L \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}} \quad \text{и} \quad I_1(\mu) = M \int \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\nu^2\eta^2)}} \tag{6}$$

соответственно.

Вопрос о таких подстановках представляет интерес для целей развития количественной теории движения в названной проблеме, причем имеются основания полагать, что дробно-квадратичные подстановки доставляют более простой аппарат для названного приведения, чем например дробно-линейные подстановки, коими интересовался Тальквист ([2]). Существенным для наших целей является также установление связи между видами подстановок и типами соответствующих движений.

Сводная таблица формул для подстановок по λ.

Тип движения	Подстановки по λ	Значения коэффициента L	Интервалы изменения ξ	Значение модуля $\varkappa$
121, 123, 124; $h<0$ $\lambda_1<1<\lambda_2$ $1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$	1) $\lambda=\frac{2\lambda_2-(\lambda_2-1)\xi^2}{2+(\lambda_2-1)\xi^2}$ 2) $\lambda=\frac{\lambda_2-\lambda_1-\lambda_1(\lambda_2-1)\xi^2}{\lambda_2-\lambda_1-(\lambda_2-1)\xi^2}$	1) $L=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{h(\lambda_1-\lambda_2)}}$ 2) $L=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h(\lambda_1-\lambda_2)}}$	1) $1\geqslant\xi^2\geqslant0$ 2) $0\leqslant\xi^2\leqslant1$	$\varkappa^2=\frac{(\lambda_1+1)(\lambda_2-1)}{2(\lambda_2-\lambda_1)}$
131; $h<0$ $1<\lambda_1<\lambda_2$ $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$	1) $\lambda=\frac{\lambda_2(\lambda_1+1)-(\lambda_2-\lambda_1)\xi^2}{\lambda_1+1+(\lambda_2-\lambda_1)\xi^2}$ 2) $\lambda=\frac{\lambda_1(\lambda_2-1)-(\lambda_2-\lambda_1)\xi^2}{\lambda_2-1-(\lambda_2-\lambda_1)\xi^2}$	1) $L=\frac{-2}{\sqrt{h(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}}$ 2) $L=\frac{2}{\sqrt{h(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}}$	1) $1\geqslant\xi^2\geqslant0$ 2) $0\leqslant\xi^2\leqslant1$	$\varkappa^2=\frac{2(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1+1)(\lambda_2-1)}$
214 (214*a*); $h>0$ $-1<\lambda_2<\lambda_1<1$ $1\leqslant\lambda\leqslant\infty$	1) $\lambda=\frac{2\lambda_2\xi^2+1-\lambda_2}{2\xi^2-1+\lambda_2}$ 2) $\lambda=\frac{2\lambda_1\xi^2-1-\lambda_1}{2\xi^2-1-\lambda_1}$	1) $L=\frac{-2}{\sqrt{h(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}}$ 2) $L=\frac{2}{\sqrt{h(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}}$	1) $1\geqslant\xi^2\geqslant\frac{1-\lambda_2}{2}>0$ 2) $0\leqslant\xi^2\leqslant\frac{1+\lambda_1}{2}<1$	$\varkappa^2=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}$
212, 213, 214*b*; $h>0$ $\lambda_2<-1<\lambda_1<1$ $1\leqslant\lambda\leqslant\infty$	Формулы те же, что и в случае 121.		1) $1\geqslant\xi^2\geqslant\frac{2}{1-\lambda_2}>0$ 2) $0\leqslant\xi^2\leqslant\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}<1$	$\varkappa^2=\frac{(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}{1(\lambda_1-\lambda_2)}$
222; $h>0$ $\lambda_2<-1<1<\lambda_1$ $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\infty$	Формулы те же, что и в случае 131.		1) $1\geqslant\xi^2\geqslant\frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-\lambda_2}>0$ 2) $0\leqslant\xi^2\leqslant\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}<1$	$\varkappa^2=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)}$

Сводная таблица формул для подстановок по μ.

Тип движения	Подстановки по μ	Значения коэффициента M	Интервалы изменения η	Значение модуля ν
121, 131; $h<0$ μ_1 и μ_2 комплексны или оба >1 $-1\leqslant\mu\leqslant 1$	1) $\mu=\dfrac{2\mu_2\eta^2-\mu_2+1}{2\eta^2+\mu_2-1}$ 2) $\mu=\dfrac{\mu_1+1-2\mu_1\eta^2}{\mu_1+1-2\eta^2}$	1) $M=\dfrac{2}{\sqrt{h(1+\mu_1)(1-\mu_2)}}$ 2) $M=\dfrac{-2}{\sqrt{h(1+\mu_1)(1-\mu_2)}}$	1) $0\leqslant\eta^2\leqslant 1$ 2) $1\geqslant\eta^2\geqslant 0$	$\nu^2=\dfrac{2(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1+1)(\mu_2-1)}$
123; $h<0$ $-1<\mu_1<1<\mu_2$ 213; $h>0$ $\mu_2<-1<\mu_1<1$ $-1\leqslant\mu\leqslant\mu_1$	1) $\mu=\dfrac{\mu_2(1+\mu_1)\eta^2-\mu_2+\mu_1}{(1+\mu_1)\eta^2+\mu_2-\mu_1}$ 2) $\mu=\dfrac{2\mu_1-(1+\mu_1)\eta^2}{2-(1+\mu_1)\eta^2}$	1) $M=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{h(\mu_1-\mu_2)}}$ 2) $M=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{h(\mu_1-\mu_2)}}$	1) $0\leqslant\eta^2\leqslant 1$ 2) $1\geqslant\eta^2\geqslant 0$	$\nu^2=\dfrac{(\mu_1+1)(\mu_2-1)}{2(\mu_2-\mu_1)}$
124 (124α); $h<0$ $-1<\mu_1<\mu_2<1$ $-1\leqslant\mu\leqslant\mu_1$	1) $\mu=\dfrac{(1+\mu_1)\eta^2-1+\mu_1}{(1+\mu_1)\eta^2+1-\mu_1}$ 2) $\mu=\dfrac{\mu_1(1+\mu_2)-\mu_2(1+\mu_1)\eta^2}{1+\mu_2-(1+\mu_1)\eta^2}$	1) $M=\dfrac{2}{\sqrt{h(\mu_1-1)(\mu_2+1)}}$ 2) $M=\dfrac{-2}{\sqrt{h(\mu_2-1)(\mu_2+1)}}$	1) $0\leqslant\eta^2\leqslant 1$ 2) $1\geqslant\eta^2\geqslant 0$	$\nu^2=\dfrac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}$
124 (124β); $h<0$ $-1<\mu_1<\mu_2<1$ $\mu_2\leqslant\mu\leqslant 1$	1) $\mu=\dfrac{1+\mu_2-(1-\mu_2)\eta^2}{1+\mu_2+(1-\mu_2)\eta^2}$ 2) $\mu=\dfrac{\mu_2(1-\mu_1)-\mu_1(1-\mu_2)\eta^2}{1-\mu_1-(1-\mu_2)\eta^2}$	1) $M=\dfrac{-2}{\sqrt{h(\mu_1-1)(\mu_2+1)}}$ 2) $M=\dfrac{2}{\sqrt{h(\mu_1-1)(\mu_2+1)}}$	1) $1\geqslant\eta^2\geqslant 0$ 2) $0\leqslant\eta^2\leqslant 1$	$\nu^2=\dfrac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}$
214; $h>0$ $-1<\mu_2<\mu_1<1$ $\mu_2\leqslant\mu\leqslant\mu_1$	1) $\mu=\dfrac{\mu_2(1+\mu_1)+(\mu_1-\mu_2)\eta^2}{1+\mu_1-(\mu_1-\mu_2)\eta^2}$ 2) $\mu=\dfrac{\mu_1(1-\mu_2)-(\mu_1-\mu_2)\eta^2}{1-\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\eta^2}$	1) $M=\dfrac{2}{\sqrt{h(1+\mu_1)(1-\mu_2)}}$ 2) $M=\dfrac{-2}{\sqrt{h(1+\mu_1)(1-\mu_2)}}$	1) $0\leqslant\eta^2\leqslant 1$ 2) $1\geqslant\eta^2\geqslant 0$	$\nu^2=\dfrac{2(\mu_1-\mu_2)}{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}$
212, 213; $h>0$ $\mu_2<-1<1<\mu_1$ $-1\leqslant\mu\leqslant 1$	Формулы те же, что и в случае 121.			

Само преобразование оказалось более удобным вести следующим образом. Сначала интегралы (2) преобразовались к виду

$$I(\lambda)=\int\frac{du}{\sqrt{H(1-Au^2)(1-Bu^2)}} \text{ и } I_1(\mu)=\int\frac{dv}{\sqrt{H_1(1-A_1v^2)(1-B_1v^2)}} \tag{7}$$

при помощи следующего частного вида дробно-квадратичных подстановок (5):

$$\lambda=\frac{1+u^2}{1-u^2} \text{ и } \mu=\frac{1+v^2}{1-v^2}$$

или

$$\lambda=\frac{\lambda_1+\lambda_2u^2}{1+u^2} \text{ и } \mu=\frac{\mu_1+\mu_2v^2}{1+v^2}, \tag{8}$$

где λ_1, λ_2 μ_1 и μ_2 суть корни многочленов $R(\lambda)$ и $S(\mu)$, причем величины H, A, B и H_1, A_1, B_1 зависят как раз от этих корней λ_1, λ_2 и $\mu_1\, \mu_2$, которые в свою очередь зависят от постоянных интеграции h и α. Употребление подстановок (8) позволяет упростить вычисления.

После этого теория преобразования ([5]) эллиптических интегралов (7) к нормальному лежандрову виду доставляет нам подстановки

$$u^2=\frac{a_0'+a_2'\xi^2}{b_0'+b_2'\xi^2} \text{ и } v^2=\frac{\alpha_0'+\alpha_2'\eta^2}{\beta_0+\beta_2'\eta^2}, \tag{9}$$

где, во-первых, очевидно один из коэффициентов может быть равен единице, но кроме того по крайней мере один из них (можеть быть и два) обязательно должен равняться нулю, и наконец оставшиеся два коэффициента (или только один из них) зависят от постоянных интегрирования; в том случае, когда только один из коэффициентов зависит от постоянных h и α, тогда другой либо равен -1, либо равен 0. Эти подстановки (9) как раз позволяют нам завершить интересующее нас преобразование.

В помещаемой ниже сводке результатов мы не даем отдельно промежуточных подстановок (8) и (9), но ограничиваемся лишь указанием окончательной подстановки, которая получается исключением переменных u и v из (8) и (9) и имеет следующий вид:

$$\lambda=\frac{a_0+a_2\xi^2}{b_0+b_2\xi^2}, \qquad \mu=\frac{\alpha_0+\alpha_2\eta^2}{\beta_0+\beta_2\eta^2},$$

представляющий частный случай подстановки (5).

Как видно из таблицы, каждому типу движения соответствуют по две различные подстановки для λ и μ, причем одна из этих подстановок несколько сложнее, чем другая. Что касается модулей эллиптических интегралов, то для них получаются одинаковые выражения в обоих случаях.

По поводу связи между типами движения и типами подстановок должно отметить, что связь эта хотя и существует, но взаимно однозначной не является.

В заключение укажем, что в нашей работе, напечатанной на армянском языке ([6]), мы рассматривали подстановки только для λ, причем наше утверждение о том, что других подстановок, кроме приведенных в этой работе, не существует, как видно из результатов, приведенных в настоящей заметке, не верно.

Поступило
19 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, I. [2] Acta Soc. Scient. Fennicae, Nov. ser., № 1, Helsinki (1927). [3] Астрон. журнал, XI, вып.4 (1934). [4] Comment. Physico-Math. Soc. Scient. Fennicae, VIII, № 2, Helsinki (1935). [5] Montessus de Ballore, Leçons sur les fonctions elliptiques. [6] Бюллетень Гос. астрон. обсерватории Армянской ССР, 11 (1938).