Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ СО СЛАБО ИЗОГНУТОЙ ОСЬЮ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 V 1939)

Мы рассмотрим деформации стержня, для которого уравнение боковой поверхности имеет вид:

$$f\left(x, y+\frac{\beta}{2} z^2\right)=0. \tag{1}$$

Параметр β, который мы будем считать малым, определяет кривизну оси стержня. Введем переменные

$$\xi=x, \quad \eta=y+\frac{\beta}{2} z^2, \quad \zeta=z. \tag{2}$$

В этих переменных ур-ние боковой поверхности преобразуется к

$$f(\xi, \eta)=0. \tag{3}$$

Отметим дифференциальные соотношения между переменными:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial \zeta}+\beta\zeta\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{4}$$

Мы решим здесь задачи: 1) об изгибе стержня (плоскости перпендикулярной той, в которой лежит его ось) парами, действующими в торцевом сечении; 2) об изгибе стержня в его плоскости; 3) о кручении стержня; 4) о растяжении стержня силами, приложенными в торцевом сечении. Все задачи решаются с точностью до β^2. Результаты легко обобщаются на случай стержня двояко изогнутого, если отбрасывать степени β выше первой. Изгиб сосредоточенной силой составит предмет специального сообщения.

1) Изгиб стержня в плоскости xoz парой, приложенной в торцевом сечении ($z=0$)

Зададимся перемещениями:

$$u=\frac{\alpha}{2}\left[\zeta^2+\nu\left(\xi^2-\eta^2\right)\right]+\alpha\beta u^{(1)}, \quad v=\alpha\nu\xi\eta+\alpha\beta v^{(1)}, \quad w=-\alpha\xi\zeta+\alpha\beta w^{(1)}, \tag{5}$$

где $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ — искомые функции от переменных ξ, η, ζ, $\alpha=-\frac{M}{EI_\xi}$; M — момент изгибающей пары.

Для напряжений получим:

$$\left.\begin{array}{r}\sigma_{xx}=\alpha\beta\sigma_{xx}^{(1)}, \quad \sigma_{xy}=\alpha\beta\sigma_{xy}^{(1)}, \sigma_{yy}=\alpha\beta\sigma_{yy}^{(1)}, \quad \sigma_{xz}=-\alpha\beta\mu\nu\eta\zeta+\alpha\beta\sigma_{xz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}=-E\alpha\xi+\alpha\beta\sigma_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{yz}=\alpha\beta\mu\nu\xi\zeta+\alpha\beta\sigma_{yz}^{(1)}\end{array}\right\} \tag{6}$$

($\sigma_{xx}^{(1)}$ и пр. — неизвестные функции от ξ, η, ζ, которые мы условно будем называть напряжениями). Для выписанной системы напряжений составим уравнения равновесия, условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности, и условия совместности, пользуясь при этом соотношениями (4); получим:

$$L_1^{(1)} - \mu\nu\eta = 0, \quad L_2^{(1)} + \mu\nu\xi = 0, \quad L_3^{(1)} = 0; \tag{7}$$

здесь

$$L_1^{(1)} = \frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta},$$

$$M_1^{(1)} = 0; \quad M_2^{(1)} = 0; \quad M_3^{(1)} - \mu\nu\eta\zeta f'_\xi - (E - \mu\nu)\,\xi\zeta f'_\eta = 0. \tag{8}$$

$$(M_1^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta \ldots M_3^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta),$$

$$N_{11}^{(1)} = 0; \quad N_{22}^{(1)} = 0; \quad N_{33}^{(1)} = 0; \quad N_{12}^{(1)} = 0; \quad N_{13}^{(1)} = 0; \quad N_{23}^{(1)} = 0 \tag{9}$$

$$N_{11}^{(1)} = \nabla^2\sigma_{xx}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)})$$

$$N_{12}^{(1)} = \nabla^2\sigma_{xy}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)})$$

. . . .

Из написанных условий находим:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \mu\nu\eta\zeta; \quad \sigma_{yz}^{(1)} = (E - \mu\nu)\,\xi\zeta;$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = -\frac{E}{2}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}; \qquad \sigma_{yy}^{(1)} = -\frac{E}{2}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}; \tag{10}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2}(\eta^2 - \xi^2) - \frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}, \quad \sigma_{zz} = E\xi\eta + \nu\nabla^2 F + A\xi + B\eta + C.$$

Функция $F(\xi, \eta)$ удовлетворяет ур-нию $\nabla^4 F = 0$ и контурному условию

$$\left.\begin{aligned} F''_{\eta\eta} f'_\xi - F''_{\xi\eta} f'_\eta - \frac{E}{2}\xi f'_\xi + \frac{E}{y}(\eta^2 - \xi^2) f'_\eta = 0, \\ -F''_{\xi\eta} f'_\xi + F''_{\xi\xi} f'_\eta + \frac{E}{y}(\eta^2 - \xi^2) f'_\xi - \frac{E}{2}\xi\eta f'_\eta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Постоянные A, B и C определяются из интегральных условий на торце:

$$\iint \sigma_{zz}\,d\xi d\eta = 0; \qquad \iint \xi_{zz}\,d\xi d\eta = 0; \qquad \iint \eta\sigma_{zz}\,d\xi d\eta = M. \tag{12}$$

Найденным «напряжениям» соответствуют следующие «перемещения»:

$$\left.\begin{aligned} u^{(1)} &= -\frac{\eta\zeta^2}{2} + \bar{u}(\xi, \eta, A, B, C) \\ v^{(1)} &= \frac{\xi\zeta^2}{2} + \bar{v}(\xi, \eta, A, B, C) \\ w^{(1)} &= (1+\nu)\,\xi\eta\zeta + \bar{w}(\xi, \eta, A, B, C) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ определяют некоторую плоскую деформацию и выражаются через функцию F. Остальные члены в дополнительных перемещениях определяют некоторое закручивание сечений и некоторое их искажение, пропорциональное z.

Соотношение между кривизной и изгибающим моментом остается обычным, а крутка (τ), вызванная изгибом, определяется формулой

$$\tau = \frac{M}{EI_\xi}\beta z. \tag{14}$$

2) Изгиб стержня в его плоскости

Зададим уравнение боковой поверхности

$$f\left(x + \frac{\beta}{2}z^2; \; y\right) = 0. \tag{15}$$

Положим:

$$\xi = x + \frac{\beta}{2} z^2, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z. \tag{16}$$

Отметим равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \beta\zeta \frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{17}$$

Для перемещений сохраним выражения (5). С помощью формул (17) определим напряжения:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_{xx} = -\alpha\beta\lambda\zeta^2 + \alpha\beta\sigma_{xx}^{(1)}, \ \sigma_{yy} = -\alpha\beta\lambda\zeta^2 + \alpha\beta\sigma_{yy}^{(1)}; \\ \sigma_{zz} = -\alpha E\xi - (\lambda + 2\mu)\,\alpha\beta\zeta^2 + \alpha\beta\sigma_{zz}^{(1)}; \\ \sigma_{yz} = \alpha\beta\mu\nu\eta\zeta + \alpha\beta\sigma_{yz}^{(1)}. \quad \sigma_{xz} = \alpha\beta\mu\nu\xi\zeta + \alpha\beta\sigma_{xz}^{(1)}; \ \sigma_{xy} = \alpha\beta\sigma_{xy}^{(1)}; \end{array}\right\} \tag{18}$$

Уравнения равновесия:

$$L_1^{(1)} + \mu\nu\xi = 0; \qquad L_2^{(1)} + \mu\nu\eta = 0; \qquad L_3^{(1)} - (2\lambda + 6\mu)\,\zeta = 0. \tag{19}$$

Условия на боковой поверхности:

$$M_1^{(1)} - \lambda\zeta^2 f'_\xi = 0; \quad M_2^{(1)} \lambda\zeta^2 f'_\eta; \quad M_3^{(1)} + \mu\nu\zeta\,(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0. \tag{20}$$

Условия совместности:

$$N_{11}^{(1)} = \varkappa_1; \quad N_{12}^{(1)} = 0; \quad N_{22}^{(1)} = \varkappa_1; \quad N_{13}^{(1)} = 0; \quad N_{33}^{(1)} = \varkappa_2; \quad N_{23}^{(1)} = 0; \tag{21}$$

$$\varkappa_1 = 2\lambda; \qquad \varkappa_2 = \frac{2\mu}{1 - 2\nu}\,(6 - 5\nu - 3\nu^2).$$

Из условий (19—21) находим:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_{xz}^{(1)} = -\mu\nu\xi\zeta; \quad \sigma_{yz}^{(1)} = -\mu\nu\eta\zeta; \quad \sigma_{xx}^{(1)} = \lambda\zeta^2 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}; \ \sigma_{yy}^{(1)} = \lambda\zeta^2 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}. \\ \sigma_{xy}^{(1)} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}; \ \sigma_{zz}^{(1)} = \nu\nabla^2 F + (\lambda + 6\mu + \mu\nu)\,\zeta^2 + m\,(\xi^2 + \eta^2) + A\xi + B\eta + C. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Функция $F(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению $\nabla^4 F = n$ внутри контура $f(\xi, \eta) = 0$ и обращается в нуль на контуре:

$$m = -\frac{\lambda\nu}{2}, \qquad n = \frac{\mu\nu^2}{1 + \nu}.$$

A, B и C определяются из условий на торце (в сечении $z = 0$

$$\iint \sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = 0; \qquad \iint \xi\sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = M; \qquad \iint \eta\sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = 0. \tag{23}$$

Мы не выпишем здесь перемещений, сводящихся к некоторому наклону и искажению сечений, отметим только, что и здесь сохраняется обычное соотношение между приращением кривизны и изгибающим моментом.

Комбинируя решения задач (1) и (2), можно определить деформацию стержня, боковая поверхность которого определяется равенством:

$$f\left(x + \beta_1 \frac{z^2}{2}, \quad y + \beta_2 \frac{z^2}{2}\right) = 0. \tag{24}$$

Разумеется, это легко сделать, сохраняя линейность задачи, т. е. отбрасывая произведения и крадраты параметров β_1 и β_2. Разумеется, случай косого изгиба плоского стержня также может быть получен наложением решений задачи (1) и (2). Метод применим и для стержней с боковой поверхностью, определяемой уравнением

$$f(x + \beta_1 z^{n_1}, \quad y + \beta_2 z^{n_2}) = 0,$$

где n_1 и n_2 — целые числа, но решение приходится искать в виде полиномов по степеням z.

Поступило
13 V 1939.