Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

П. В. СОЛОВЬЕВ

ФУНКЦИИ ГРИНА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 V 1939)

Пусть в пространстве (x, y, t) задана область

$$\overline{D} = D\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant c \\ 0 \leqslant t \leqslant h \end{pmatrix}$$

Эту область будем называть параллелепипедом. Требуется найти функцию $G(x, y, t;\ \xi, \eta, \zeta) = G(M, P)$, которая относительно переменных x, y, t является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

в области D и относительно переменных ξ, η, ζ — решением уравнения, сопряженного первому (точка $P \neq M$) для той же области. Функция $G(M, P)$ в области $\overline{D}$ имеет ту же особенность, что и функция

$$\frac{1}{t-\zeta} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\zeta)}} \qquad (\zeta \leqslant t). \tag{2}$$

На границе * области D функция $G(M, P) \equiv 0$. Функцию $G(M, P)$ в дальнейшем будем называть функцией Грина для параллелепипеда $\overline{D}$ уравнения (1). Применяя тот же метод, что и при построении функции Грина для трапеции уравнения теплопроводности **, получим:

$$G(M, P) = \frac{1}{t-\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{[2(n-1)b+x+\xi]^2}{4(t-\zeta)}} + e^{-\frac{[2nb-x-\xi]^2}{4(t-\zeta)}} - \right.$$
$$\left. - e^{-\frac{[2(n-1)b+x-\xi]^2}{4(t-\zeta)}} - e^{-\frac{[2nb-x+\xi]^2}{4(t-\zeta)}} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{[2(m-1)c+y+\eta]^2}{4(t-\zeta)}} + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{[2mc-y-\eta]^2}{4(t-\zeta)}} - e^{-\frac{[2(m-1)c+y-\eta]^2}{4(t-\zeta)}} - e^{-\frac{[2mc-y+\eta]^2}{4(t-\zeta)}} \right\} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{t-\zeta} g(x, t;\ \xi, \zeta \mid b)\, g(y, t;\ \eta, \zeta \mid c). \tag{3}$$

* Под границей области D будем понимать грани параллелепипеда $y = 0$; $y = c$; $x = 0$; $x = b$.

** См. ДАН, XXIII, № 2 (1939).

Ряд $g(x, t; \xi, \zeta \mid b)$ абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. Действительно, сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{n_0-1}\left\{e^{-\frac{[2(n-1)b+x+\xi]^2}{4(t-\zeta)}}+e^{-\frac{[2nb-x-\xi]^2}{4(t-\zeta)}}-e^{-\frac{[2(n-1)b+x-\xi]^2}{4(t-\zeta)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{[2nb-x+\xi]^2}{4(t-\zeta)}}\right\}+4\sum_{n=n_0}^{\infty}e^{-kn^2}$$

является мажорантным рядом по отношению к ряду $g(x, t; \xi, \zeta \mid b)$.

Здесь n_0 и k подобраны так, что

$$B_n=\min\left\{\frac{\left[2\left(1-\frac{1}{n}\right)b+\frac{x+\xi}{n}\right]^2}{4(t-\zeta)};\quad \frac{\left[2b-\frac{x+\xi}{n}\right]^2}{4(t-\zeta)};\right.$$

$$\left.\frac{\left[2\left(1-\frac{1}{n}\right)b+\frac{x-\xi}{n}\right]^2}{4(t-\zeta)};\quad \frac{\left[2b-\frac{x-\xi}{n}\right]^2}{4(t-\zeta)}\right\}\geqslant k>0$$

для $n \geqslant n_0$ (что возможно). Следовательно ряд $g(x, t; \xi, \zeta \mid b)$ абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. Точно также нетрудно установить абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2};\quad \frac{\partial g}{\partial t};\quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2};\quad \frac{\partial g}{\partial \zeta},$$

полученных из ряда $g(x, t; \xi, \zeta \mid b)$ почленным дифференцированием. Ряд (3), представляющий собой произведение двух абсолютно и равно мерно сходящихся рядов, абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$ вместе с рядами

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2};\quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2};\quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2};\quad \frac{\partial G}{\partial t};\quad \frac{\partial G}{\partial \zeta}.$$

Далее после подстановки убеждаемся, что

$$G(M, P)\big|_{\substack{\xi=0\\ \xi=k}} \equiv G(M, P)\big|_{\substack{\eta=0\\ \eta=c}} \equiv 0.$$

Таким образом ряд (3) представляет собой функцию Грина для параллелепипеда $\overline{D}$ уравнения (1).

Построим теперь функцию Грина $G(M, P)$ для $n+1$-мерного параллелепипеда $\overline{D}=D\begin{pmatrix} 0\leqslant x_1\leqslant a_1\\ \ldots\ldots\ldots\\ 0\leqslant x_n\leqslant a_n\\ 0\leqslant t\ \leqslant h\end{pmatrix}$ уравнения

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5}$$

Поступая аналогично предыдущему, получим

$$G(M, P)=\frac{1}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^{n} g(x_i, \xi_i;\ t, \zeta \mid a_i),$$

где

$$g(x_i, \xi_i;\ t, \zeta \mid a_i)=\sum_{n=1}^{n}\left\{e^{-\frac{[2(n-1)a_i+x_i+\xi_i]^2}{4(t-\zeta)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{[2na_i-x_i-\xi_i]^2}{4(t-\zeta)}}-e^{-\frac{[2(n-1)a_i+x_i-\xi_i]^2}{4(t-\zeta)}}-e^{-\frac{[2na_i-x_i+\xi_i]^2}{4(t-\zeta)}}\right\}. \tag{7}$$

Ряд (6), представляющий собой произведение n абсолютно и равномерно сходящихся рядов, является абсолютно и равномерно сходящимся рядом в области $\overline{D}$.

Ряды, полученные из ряда (6) почленным дифференцированием

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i}; \quad \frac{\partial G}{\partial t}; \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta} \qquad (i=1, 2, \ldots n),$$

также будут абсолютно и равномерно сходящимися в области $\overline{D}$. Функция $G(M, P)$ (ряд 6) в области $\overline{D}$ имеет ту же особенность, что и функция

$$\frac{1}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\zeta)}}, \qquad \left[r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2\right].$$

Далее,

$$G(M, P)|_{\xi_i=a_i} \equiv G(M, P)|_{\xi_i=0} \equiv 0 \quad (i=1, 2; \ldots n).$$

Построенная функция $G(M, P)$ таким образом действительно является функцией Грина уравнения (5) для $n+1$-мерного параллелепипеда $\overline{D}$.

Функция Грина $G(M, P)$ для $n+1$-мерной пирамиды

$$\overline{D}_1 = D_1 \left\{ \begin{array}{c} k_1 t \leqslant x_1 \leqslant k_1' t + a_1 \\ k_2 t \leqslant x_2 \leqslant k_2' t + a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n t \leqslant x_n \leqslant k_n' t + a_n \\ 0 \leqslant t \leqslant h \end{array} \right\},$$

где

$$h = \min \left\{ \frac{a_1}{2(k_1 - k_1')}; \quad \frac{a_2}{2(k_2 - k_2')}; \ \ldots \ \frac{a_n}{2(k_n - k_n')} \right\} > 0,$$

имеет вид

$$G(M, P) = \frac{1}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \xi_i; \ t, \zeta \mid k_i, k_i', \ a_i),$$

где

$$g(x_i, \xi_i; \ t, \zeta \mid k_i, k_i', a_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{[2nk_i t - 2(n-1)(k_i' t + a_i) - x_i - \xi_i]^2}{4(t-\zeta)}} - \right.$$

$$- \{[nk_i - (n-1) k_i'] x_i - [nk_i - (n-1) k_i']^2 t + (n-1) [nk_i - (n-1) k_i'] a_i\} -$$

$$- e^{-\frac{[2nk_i t - 2n(k_i' t + a_i) + x_i - \xi_i]^2}{4(t-\zeta)}} - \{n(k_i' - k_i) x_i - n^2 (k_i' - k_i)^2 t +$$

$$+ n[(n+1) k_i - nk_i'] a_i\} + e^{-\frac{[2n(k_i' t + a_i) - 2(n-1) k_i t - x_i - \xi_i]^2}{4(t-\zeta)}} -$$

$$- \{[nk_i' - (n-1) k_i] x_i - [nk_i' - (n-1) k_i]^2 t - n[nk_i' - (n-1) k_i] a_i\} -$$

$$- e^{-\frac{[2nk_i t + 2n(k_i' t + a_i) + x_i - \xi_i]^2}{4(t-\zeta)}} - \{n(k_i - k_i') x_i - n^2 (k_i - k_i')^2 t +$$

$$\left. + n[(n+1) k_i - nk_i'] a_i\} \right\}.$$

Узбекистанский государственный
университет.

Поступило
13 V 1939.