«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1990, ТОМ 21, ВЫП. 3

УДК 539.1.01:530.145

КОНТУРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А. Н. Сисакян, О. Ю. Шевченко
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

И. Л. Соловцов
Гомельский политехнический институт, Гомель

Вводятся калибровочно-инвариантные полевые переменные и рассматриваются их свойства. Изучается зависимость калибровочно-инвариантного спинорного пропагатора от выбора контура. Показывается, что эта зависимость, а также все инфракрасные особенности аккумулируются фактором, равным вильсоновской петле с контуром, состоящим из исходного контура и отрезка прямой. Демонстрируется, что в предлагаемом подходе в двумерной квантовой хромодинамике не возникает трудностей, связанных с необходимостью введения дополнительной инфракрасной регуляризации. Формулируется естественная предельная процедура, дающая конфайнмент кварка. Обсуждается вопрос оптимального выбора контура. Предлагается новая схема квантования калибровочных полей. Показано, что переход из фазового пространства в конфигурационное может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла остаются две δ-функции, отражающие калибровочное условие и закон Гаусса. Получен новый пропагатор векторного поля и анализируется ряд калибровочных моделей.

Gauge-invariant and Path-dependent objects are introduced and their properties are investigated. It is proved that infrared singularities of the gauge-invariant spinor propagator can be factorized as the Wilson loop that contains the primary Path and the straight-line contour. It is shown that the proposed approach in QCD_2 has no difficulties resulting from auxiliary infrared regularization. The natural limit that provides quark confinement is formulated. A new scheme of quantization of gauge fields is proposed. The Path-integral in the configuration space is shown to contain two functional δ-functions that reflect the gauge condition and the Gauss law. A new propagator is obtained for a vector field, and a set of gauge models is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Современное представление о мире элементарных частиц базируется на концепции калибровочной симметрии, сформировавшейся первоначально в электродинамике и обобщенной затем на случай неабелевых теорий. Сегодня такие калибровочные теории, как теория электрослабых взаимодействий и квантовая хромодинамика (КХД), имеют прочный экспериментальный и теоретический фундамент. Вместе с тем все более острыми становятся и нерешенные проблемы. К числу таких относится, например, центральная проблема квантовой хромодинамики — проблема запирания цвета, конфайнмента.

Один из основных подходов к проблеме конфайнмента КХД связан с анализом полных функций Грина в инфракрасной области (см. например, [1—6], а также обзор [7] и цитируемую там литературу). При этом, как правило, рассматриваются стандартные функции Грина, например изучается фермионный пропагатор вида

$$i \langle 0 \mid T\psi(x)\bar{\psi}(y) \mid 0\rangle .$$

Вместе с тем известно, что инфракрасное поведение стандартного полного фермионного пропагатора существенно зависит от выбора калибровки. Так, в случае квантовой электродинамики в классе ковариантных α-калибровок электронный пропагатор имеет точку ветвления при $p^2 = m^2$, которая вырождается в простой полюс только при $\alpha = 3$ (калибровка Соловьева — Йенни) [8].

Выбор калибровки, по-видимому, оказывает существенное влияние на аналитические свойства пропагатора и в неабелевом случае [7, 9], Кроме того, возникает проблема с трактовкой массы кварка [10, 11]. Пример двумерной КХД ($КХД_2$) показывает, что имеются серьезные трудности с выбором инфракрасной регуляризации при рассмотрении калибровочно-зависимого кваркового пропагатора в рамках $1/N$-приближения.

Так, в работе [12]' т Хоофт, доопределяя уравнение для кваркового пропагатора в калибровке светового конуса, использовал в инфракрасной области регуляризацию в виде $\theta(k_- - \lambda)$, где λ — параметр инфракрасного обрезания ($\lambda \to 0$ в пределе снятия регуляризации). При этом оказалось, что полюс кваркового пропагатора отодвигается на бесконечность в пределе $\lambda \to 0$, что с физической точки зрения истолковывалось как конфайнмент отдельного кварка.

Иной способ инфракрасной регуляризации обсуждался в [13], в которой инфракрасная особенность глюонного пропагатора понималась в смысле главного значения. При этом оказалось, что полюс находится в конечной точке при $p^2 = m^2 - g^2N/\pi$.

Инфракрасная регуляризация, предложенная в работе [14] и основанная на использовании поворота Вика и последующем симметричном интегрировании, приводит к новому варианту для кваркового пропагатора — появляется разрез в комплексной плоскости p^2.

Таким образом, уже в $КХД_2$ попытка описания конфайнмента кварка в терминах стандартного калибровочно-зависимого пропагатора встречает серьезные трудности (см. в связи с этим также [15,16]).

Все эти результаты приводят к мысли, что изучение структуры калибровочных теорий целесообразно вести на языке калибровочно-инвариантных (КИ) величин. В частности, для исследования проблемы конфайнмента кварков следует отказаться от рассмотрения калибровочно-зависимого пропагатора, который, по-видимому, не является адекватным для этой цели объектом, и перейти к рассмотрению КИ-величины.

Введение КИ-полевых переменных и изучение на их основе инфракрасной области ряда полевых калибровочных моделей и является одной из задач настоящей работы.

Другой вопрос, который мы собираемся здесь рассмотреть, связан с проблемой квантования калибровочных теорий. Следует отметить, что, несмотря на достаточно большой временной интервал, отделяющий нас от момента опубликования работ [17], эта проблема вызывает постоянный устойчивый интерес. В последнее время этот интерес заметно усилился (см. [18, 19] и ссылки, приведенные там). Этому, в частности, способствовало обнаруженное расхождение результатов вычисления по теории возмущений вильсоновской петли (заведомо калибровочно-инвариантного объекта) при работе в различных калибровках [20]. Причина несоответствия согласно [18—21] видится в том, что сингулярность в пропагаторе в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$ по импульсной переменной k_0 не следует понимать в смысле главного значения. При этом предлагаемый модифицированный пропагатор, исправляющий положение в координатном представлении, трансляционно-неинвариантен. Противоречия, к которым приводит эта трансляционная неинвариантность, рассмотрены в [19]. В данной работе мы обращаем внимание на возможность иного способа разрешения отмеченной трудности. Наша стартовая позиция стандартная — функциональный интеграл в фазовом пространстве [22, 23]. Мы показываем, что переход к конфигурационному представлению может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла возникают две функциональные δ-функции, обеспечивающие выполнение как калибровочного условия, так и закона Гаусса. Таким образом, осуществляется квантование только лишь физических степеней свободы векторных полей. Изложенный ниже метод мы будем называть δ^2-квантованием.

1. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Рассмотрение КИ-полевых переменных восходит к работам Дирака и Фока [24, 25]. Развитию калибровочно-независимого формализма посвящено большое число работ (см., например, [26—30]). Приведенное ниже краткое изложение этого вопроса опирается в основном на работы [31—33]. Начнем с введения векторных КИ-полевых переменных в абелевом случае. Имеется несколько способов рассмотрения КИ-полей. Во-первых, пусть ξ — фиксированная точка пространства, а $C_{\xi x}$ — некоторый контур, соединяющий точки ξ и x. Тогда КИ-векторное поле $B_\mu(x \mid \xi)$ называемое нами полем из класса Фока, имеет вид

$$B_\mu(x \mid \xi) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int\limits_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z). \tag{1}$$

В случае прямолинейного контура $C_{\xi x}$ поле $B_\mu(x \mid \xi)$ совпадает с обычным векторным потенциалом, определенным в калибровке Фока [25]*

$$(x - \xi)^\mu A_\mu(x) = 0.$$

Нетрудно видеть, что поле $B_\mu(x \mid \xi)$ инвариантно относительно градиентных преобразований векторного потенциала

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x).$$

В силу калибровочной инвариантности поля $B_\mu(x \mid \xi)$ и линейности связи с векторным потенциалом $A_\mu(x)$ согласно формуле (1) должно существовать выражение, связывающее поле $B_\mu(x \mid \xi)$ с тензором напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, причем эта связь также должна быть линейной. Соответствующее выражение, которое мы будем называть формулой обращения, используя (1), можно получить в виде

$$B_\mu(x \mid \xi) = \int\limits_{C_{\xi x}} dz^\nu F_{\nu\sigma}(z) \frac{\partial z_\sigma}{\partial x^\mu}. \tag{2}$$

Отметим, что для введенных КИ-полей $B_\mu(x \mid \xi)$ предполагается, что точка ξ есть фиксированная точка пространства, поэтому построенные на этой основе функции Грина не обладают трансляционной инвариантностью. Эту трудность можно преодолеть, рассмотрев КИ-поля вида

$$B_\mu(x \mid f) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int d^4y\, f^\nu(x-y) A_\nu(y), \tag{3}$$

где функция $f^\nu(z)$ вещественна и удовлетворяет условиям:

$$\partial^\nu f_\nu(z) = \delta(z), \quad f^\nu(z)|_{S_\infty} = 0 \tag{4}$$

(S_∞ — бесконечно удаленная поверхность). Такие поля впервые рассматривались Дираком [24], поэтому мы их будем называть КИ-полями класса Дирака. Так же как и в случае полей класса Фока, для полей (3) существует формула обращения

$$B_\mu(x \mid f) = \int d^4y\, f^\nu(x-y) F_{\mu\nu}(y). \tag{5}$$

Более подробное рассмотрение полей вида (1) и (3) можно найти в [31—33]. Здесь мы отметим, что значительно больше возможностей

* Впоследствии эта калибровка была переоткрыта и использовалась в [34, 35].

представляют КИ-поля, получаемые путем синтеза полей классов Фока и Дирака. В частности, возникающие таким образом поля позволяют построить КИ-фермионные функции Грина, обладающие рядом интересных свойств. Новый обобщенный класс КИ-полей возникает из естественного желания совместить поля класса Фока (1) с трансляционной инвариантностью. Этого можно добиться, не фиксируя определенную точку пространства ξ, а сделав ее зависимой от аргумента поля $x : \xi = \xi(x)$. При этом, конечно, калибровочная инвариантность поля (1) разрушается. Однако если использовать введенную функцию $f_\nu(z)$, то нетрудно построить КИ-поле вида

$$B_\mu(x \mid \xi;\ f) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \times$$

$$\times \Big[\int\limits_{\xi(x)}^{x} dz^\nu A_\nu(z) + \int d^4y\, f^\nu(\xi(x) - y)\, A_\nu(y) \Big], \tag{6}$$

где функция f^ν удовлетворяет условиям (4). Для поля (6) в случае прямолинейного контура формула обращения имеет вид

$$B_\mu(x \mid \xi;\ f) = \int\limits_0^1 d\alpha\alpha\,(x-\xi)^\nu F_{\mu\nu}(\xi + \alpha(x-\xi)) +$$

$$+ \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \Big[\int\limits_0^1 d\alpha\,(1-\alpha)(x-\xi)^\nu F_{\rho\nu}(\xi+\alpha)(x-\xi)) +$$

$$+ \int d^4y\, f^\nu(x-y)\, F_{\rho\nu}(y) \Big]. \tag{7}$$

Из вышеизложенного легко понять, как строить калибровочно-инвариантные* спинорные поля. Для этого достаточно определить новое поле

$$\Psi(x \mid \ldots) = \exp(\mathrm{i}g\Lambda(x \mid \ldots))\, \psi(x), \tag{8}$$

где $\Lambda(x \mid \ldots)$ — функции, на которые действует оператор дифференцирования в выражениях (1), (3) и (6).

Рассмотрим теперь обобщение полей фоковского класса на неабелев случай. Поле Янга — Миллса $A_\mu(x)$ при калибровочных преобразованиях с параметром $u(x)$ преобразуется следующим образом:

$$A_\mu(x) \to u(x) A_\mu(x) u^{-1}(x) - \frac{\mathrm{i}}{g} u(x)\, \partial_\mu u^{-1}(x), \tag{9}$$

* В случае полей из фоковского класса при любых локальных калибровочных преобразованиях в спинорных полях (8) возникает глобальный фазовый фактор, зависящий от фиксированной точки пространства. Для обсуждающейся в дальнейшем спинорной функции Грина такой фактор, очевидно, несуществен.

а тензор напряженности

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \mathrm{i}g\,[A_\mu(x),\ A_\nu(x)] \tag{10}$$

преобразуется по закону

$$G_{\mu\nu}(x) \to u(x)\,G_{\mu\nu}(x)\,u^{-1}(x). \tag{11}$$

Определим

$$V(\xi, x) = \mathscr{P}\exp\left[\mathrm{i}g\int\limits_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z)\right], \tag{12}$$

где $\mathscr{P}$ означает упорядочение вдоль пути $C_{\xi x}$. При калибровочных преобразованиях имеем:

$$V(\xi, x) \to u(\xi)\,V(\xi, x)\,u^{-1}(x). \tag{13}$$

Выполним калибровочное преобразование с $u(x) = V(\xi, x)$ над исходными полями в лагранжиане. В результате векторное поле $A_\mu(x)$ перейдет в поле

$$B_\mu(x \mid \xi) = V(\xi \mid x)\,A_\mu(x)\,V^{-1}(\xi, x) - \frac{\mathrm{i}}{g}\,V(\xi, x)\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,V^{-1}(\xi, x), \tag{14}$$

а напряженность $G_{\mu\nu}(x)$ в

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x \mid \xi) &= V(\xi, x)\,G_{\mu\nu}(x)\,V^{-1}(\xi, x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,B_\nu(x \mid \xi) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\,B_\mu(x \mid \xi) + \\ &\quad + \mathrm{i}g\,[B_\mu(x \mid \xi),\ B_\nu(x \mid \xi)]. \end{aligned} \tag{15}$$

Легко проверить теперь, что при локальных калибровочных преобразованиях с параметром $u(x)$ исходных полей $A_\mu(x)$ новые поля (14) и (15) преобразуются глобально с одним и тем же законом преобразования:

$$B_\mu(x \mid \xi) \to u(\xi)\,B_\mu(x \mid \xi)\,u^{-1}(\xi), \tag{16}$$

$$G_{\mu\nu}(x \mid \xi) \to u(\xi)\,G_{\mu\nu}(x \mid \xi)\,u^{-1}(\xi). \tag{17}$$

Если точку ξ устремить к бесконечности и положить $u(\infty) = 1$, то введенные поля (14) и (15) станут КИ-полями. Соответствующие (14) спинорные поля в лагранжиане также получаются из исходных с помощью калибровочного преобразования (12).

Пусть $z_\mu(s)$ — точка на контуре $C_{\xi x}$ ($z_\mu(0) = \xi_\mu$; $z_\mu(1) = x_\mu$). Тогда, используя уравнение параллельного переноса

$$\frac{dz^\nu}{ds}\left[A_\nu(z) - \frac{\mathrm{i}}{g}\,\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right]V^{-1}(\xi, z) = 0, \tag{18}$$

находим, что поле B_μ удовлетворяет условию

$$\frac{dz^\mu}{ds}\,B_\mu(z \mid \xi) = 0, \tag{19}$$

которое можно рассматривать как обобщенное калибровочное условие Фока*. Если поле A_μ подчинить условию (19), то

$$\mathscr{P} \exp\Big(ig \int\limits_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z)\Big) = 1.$$

Калибровки такого типа рассматриваются в [6] и носят название контурных калибровок. С помощью (19) легко проверить справедливость формулы обращения

$$B_\mu(x \mid \xi) = \int\limits_{C_{\xi x}} dz^\nu G_{\nu\sigma}(z \mid \xi) \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu}. \tag{20}$$

Таким образом, в неабелевом случае формула обращения (20) имеет тот же вид, что и формула (2) для абелева случая.

Определим, следуя [27], так называемые контурные производные

$$\widetilde{\partial}_\mu u(x \mid C) = \lim_{\Delta x_\mu \to 0} [u(x + \Delta x \mid C') - u(x \mid C)]/\Delta x^\mu, \tag{21}$$

где контуры C и C' отличаются друг от друга только на Δx_μ.

Для напряженностей (15) выполняется тождество

$$\widetilde{\partial}_\rho G_{\mu\nu}(x \mid \xi) + \widetilde{\partial}_\mu G_{\nu\rho}(x \mid \xi) + \widetilde{\partial}_\nu G_{\rho\mu}(x \mid \xi) = 0, \tag{22}$$

и их связь с полями (14) в терминах контурных производных задается соотношением

$$G_{\mu\nu}(x \mid \xi) = \widetilde{\partial}_\mu B_\nu(x \mid \xi) - \widetilde{\partial}_\nu B_\mu(x \mid \xi), \tag{23}$$

которое по форме совпадает с абелевым случаем. Абелев вид имеют также и уравнения движения свободного поля (15)

$$\widetilde{\partial}_\nu G^{\mu\nu}(x \mid \xi) = 0. \tag{24}$$

С учетом (24) можно показать, что введенное поле (14) удовлетворяет «условию Лоренца»

$$\widetilde{\partial}_\mu B^\mu(x \mid \xi) = 0. \tag{25}$$

Соотношение (25), которое получено при использовании уравнений движения (24), будем называть вторичным калибровочным условием (аналогично терминологии Дирака «вторичная связь»). В абелевом случае (25) переходит в обычное условие Лоренца. Калибровочное условие, которое накладывается на исходные векторные поля, будем называть первичной калибровкой.

---

* Действительно, в случае прямолинейного контура $C_{\xi x}$:

$$z_\mu = \xi_\mu + s\,(x - \xi)_\mu$$

и (19) дает калибровку Фока

$$(z - \xi)^\mu B_\mu\,(z \mid \xi) = 0.$$

Введение КИ-полевых переменных нельзя понимать как истребление в теории функционального калибровочного произвола. Функциональный произвол по-прежнему остается (это, например, произвол в выборе контура $C_{\xi x}$ для поля фоковского класса). Однако между множеством калибровок и множеством КИ-полей нет взаимооднозначного соответствия. КИ-формализм имеет меньшую степень произвола по сравнению с калибровочным произволом. Так, например, в неабелевом случае построение КИ-поля с помощью проектирования на калибровки, для которых имеются неоднозначности Грибова, невозможно. Таким образом, класс проекторов, допускающих введение КИ-поля, у́же класса всевозможных калибровок. Кроме того, использование контурно-зависимых полей дает возможность привлечь для анализа аргументы симметрийного и геометрического характера, позволяющие естественным образом фиксировать нежелательный функциональный произвол.

В электродинамике широко используется обладающая рядом преимуществ калибровка Соловьева — Иенни, которая возникает в классе ковариантных α-калибровок при выборе $\alpha = 3$. Однако изначально выбор $\alpha = 3$ ничем не продиктован. Покажем, что применение контурного КИ-формализма позволяет раскрыть «секрет» калибровки Соловьева — Иенни, сопоставив ей геометрически симметричную картину. Итак, будем интересоваться пропагатором введенных полей B_μ

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -\mathrm{i}\langle 0 \mid TB_\mu(x) B_\nu(y) \mid 0\rangle. \tag{26}$$

Аргументы пропагатора x и y определяют направляющий вектор геометрически выделенного прямолинейного контура интегрирования, фигурирующего при построении КИ-поля B_μ. Выбирая контуры в полях $B_\mu\ (x)$ и $B_\mu\ (y)$ идущими от соответствующих аргументов вдоль отрезка $(x,\ y)$ на бесконечность, получаем*:

$$\left.\begin{aligned} B_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_0^\infty dt\,(x-y)^\alpha A_\alpha(x+t(x-y)),\\ B_\nu(y) &= A_\nu(y) - \frac{\partial}{\partial y^\nu}\int_0^\infty d\tau\,(x-y)^\beta A^\beta(y-\tau(x-y)). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

В силу калибровочной независимости пропагатора (26) для его вычисления поле A_μ в выражениях (27) можно выбирать в произвольной калибровке. В результате несложные вычисления дают

$$D_{\mu\nu}(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi^2}\frac{1}{(z^2-\mathrm{i}0)}\left(g_{\mu\nu} - \frac{z_\mu z_\nu}{z^2}\right), \tag{28}$$

$z = x - y$.

* Поля (27) возникают в обобщенном классе КИ-полей.

Выражение (28) в точности совпадает с пропагатором в калибровке Соловьева — Иенни.

Нетрудно понять, как строятся КИ-спинорные поля. Например, в абелевом случае спинорные поля класса Фока и Дирака имеют вид

$$\Psi(x \mid \xi)=\exp\left[-\mathrm{i}g \int\limits_{C_{\xi x}} dz^{\nu} A_{\nu}(z)\right] \psi(x), \tag{29}$$

$$\Psi(x \mid f)=\exp\left[-\mathrm{i}g \int d^4y\, f^{\nu}(x-y) A_{\nu}(y)\right] \psi(x). \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что спинорные поля класса Фока (29) при локальных калибровочных преобразованиях приобретают глобальный фактор $\exp[\mathrm{i}g\lambda(\xi)]$. Кроме того, поскольку точка ξ предполагается фиксированной, то нарушается трансляционная инвариантность спинорного и векторного пропагаторов, построенных из полей фоковского класса. Этих трудностей можно избежать, устремив точку ξ к бесконечности. Именно так мы поступим при рассмотрении КХD.

2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ СПИНОРНЫЙ ПРОПАГАТОР

Рассмотрим КИ-спинорный пропагатор

$$G(x,\ y|C)=\mathrm{i}\langle 0 \mid T\psi(x)\mathscr{P}\ \exp\left[\mathrm{i}g \int\limits_{C_{xy}} dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right]\overline{\psi}(y)|0\rangle. \tag{31}$$

Калибровочная инвариантность (31) достигается за счет введения под знак T-произведения $\mathscr{P}$-упорядоченной контурной экспоненты. В результате спинорная функция Грина (31) приобретает зависимость от контура C_{xy}. Таким образом, пропагатор (31) является калибровочно-инвариантной, но контурно-зависимой величиной. Если потребовать трансляционную инвариантность (31), то для контура C_{xy} это будет означать, что при трансляциях $x \to x+a$, $y \to y+a$ контур C_{xy} должен перемещаться без деформаций как целое вместе со своими конечными точками. Иначе: для любой точки $z_{\mu}(x, y)$, лежащей на контуре C_{xy} должно выполняться

$$z_{\mu}(x+a,\ y+a)=z_{\mu}(x,\ y)+a_{\mu}. \tag{32}$$

Пусть s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ — параметр, определяющий положение точки $z_{\mu}(s)$ на контуре C_{xy}: ($z_{\mu}(0)=x_{\mu}$, $z_{\mu}(1)=y_{\mu}$). Тогда в соответствии с (32)

$$z_{\mu}(s)=x_{\mu}+\varphi_{\mu}(x-y;\ s), \tag{33}$$

где φ_{μ} — некоторая векторная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_{\mu}(x-y;\ 0)=0;\ \varphi_{\mu}(x-y;\ 1)=(y-x)_{\mu}. \tag{34}$$

В случае построения пропагатора (31) из полей фоковского класса контур C_{xy} проходит через фиксированную точку ξ, которая при трансляциях не смещается и, следовательно, трасляционная инвариантность (31) нарушается.

Из соображений геометрического характера ясно, что выделенным контуром интегрирования в (31) является отрезок прямой, соединяющей точки x и y. Прямолинейный контур может быть получен при построении спинорного пропагатора из полей обобщенного класса [33]. В дальнейшем мы увидим, что геометрически выделенный прямолинейный контур находит также и динамическое обоснование в ряде калибровочных моделей.

Модель Блоха — Нордсика. Лагранжиан модели Блоха — Нордсика отличается от лагранжиана КЭД заменой γ-матриц Дирака компонентами единичного времениподобного вектора: $\gamma_\mu \to u_\mu$, $u^2 = 1$. Следуя [36], вычисление пропагатора (31) будем производить на основе формализма функционального интеграла. Запишем (31) в виде

$$G(x,\ y)|C) = \int D[\psi,\ \bar{\psi}]\, DA\ \exp\ [\mathrm{i}gS[\psi,\ \bar{\psi};\ A]] \times \\ \times\ \psi(x)\ \exp\left[\mathrm{i}g \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right] \bar{\psi}(y), \qquad (35)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}, A]$ — полное действие, а меры $D[\psi, \bar{\psi}]$ и DA нормированы так, что при $g = 0$ выражение (35) воспроизводит свободную функцию Грина. Кроме того, мера DA включает в себя некоторое калибровочное условие, вид которого в силу калибровочной инвариантности несуществен. Выполняя в (35) интегрирование по фермионным полям, получаем

$$G(x,\ y|C) = \int DA\, \frac{[\det \mathrm{i}\hat{\partial} + g\hat{A} - m]}{\det[\mathrm{i}\hat{\partial} - m]}\, G(x,\ y|A) \times \\ \times \exp\left[\mathrm{i}S_0[A] + \mathrm{i}g \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right\}, \qquad (36)$$

где $S_0[A]$ — свободное действие векторных полей, а $G(x, y \mid A)$ — функция Грина фермиона во внешнем поле.

Отношение определителей в выражении (36) равно единице в силу отсутствия поляризации вакуума в модели Блоха — Нордсика. Фермионная функция Грина во внешнем поле удовлетворяет уравнению

$$[\mathrm{i}\hat{\partial}_x + g\hat{A}(x) - m]\, G(x,\ y|A) = -\delta(x - y), \qquad (37)$$

которое может быть решено методом пятого параметра Фока [8]. В результате для КИ-пропагатора (35) получаем

$$G(x, y|C) = i\int_0^\infty d\nu\delta(x-y-u\nu)\,e^{-i\nu(m^2-i0)}\int DA\times$$

$$\times\exp\left\{iS_0[A]+ig\int_0^\nu d\nu_1 u^\mu A_\mu(x-u\nu_1)+ig\int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right\}. \qquad (38)$$

С учетом δ-функции интеграл в (38) по ν_1 переписывается в виде контурного интеграла по отрезку прямой, соединяющему точки y и x. Таким образом, контур C_{xy} замыкается отрезком прямой, и выражение (38) переписывается в явно КИ-виде

$$G(x, y|C) = i\int_0^\infty d\nu\delta(x-y-u\nu)\exp[-i\nu(m^2-i0)]\times$$

$$\times\langle 0|\mathscr{P}\exp\left[ig\oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right]|0\rangle. \qquad (39)$$

Контур интегрирования в вильсоновском операторе изображен на рис. 1.

Как видно из (39), на поведение КИ-функции Грина существенное влияние оказывает вид вакуумного среднего от вильсоновского оператора, который, в свою очередь определяется выбором исходного контура C_{xy}. Если мы хотим придать пропагатору (39) самостоятельный физический смысл, следует заметить, что в модели Блоха — Нордсика существует калибровка $u^\mu A_\mu(x) = 0$, в которой модель расщепляется на два невзаимодействующих друг с другом фотонный и фермионный секторы. Иными словами, взаимодействие в модели носит фиктивный, чисто калибровочный характер, и физический фермионный пропагатор должен быть свободным. Этого можно достичь, выбрав в качестве C_{xy} прямолинейный контур. Таким образом, соображения геометрического характера о выделенности прямолинейного контура находят в модели Блоха — Нордсика свое динамическое подтверждение. Как мы увидим ниже, прямолинейный контур является выделенным и в других моделях.

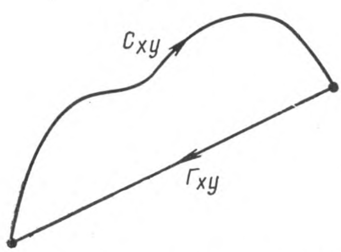

Рис. 1. Замкнутый контур Г

Начнем с электродинамики, где нас будет интересовать поведение КИ-спинорного пропагатора в инфракрасной области.

Уравнения Дайсона — Швингера. Следуя работам [33, 37], получаем уравнения Дайсона — Швингера для функции Грина (31), выбрав для простоты в качестве контура C_{xy} отрезок прямой, соединяющий точки x и y.

Введем в лагранжиан добавку с векторным источником J_μ: $\Delta\mathcal{L} = J_\mu(x)A^\mu(x)$. В представлении взаимодействия КИ-спинорный пропагатор запишем в виде

$$G(x, y \mid J) = S_0^{-1}[J]\, g(x, y \mid J), \tag{40а}$$

где

$$S_0[J] = \langle 0 \mid TS[J] \mid 0\rangle; \tag{40б}$$

$$g(x, y|J) = \mathrm{i}\,\langle 0|T\psi(x)\,\mathscr{P}\exp\left[\mathrm{i}g\int\limits_x^y dz^\mu A_\mu(z)\right]\psi(y)\,S[J]\,0\rangle, \tag{40в}$$

а $S[J]$ — это S-матрица при наличии источника.

Функция $g(x, y|J)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\mathrm{i}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - g\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - g\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\limits_x^y dz^\nu\frac{\delta}{\delta J^\nu(z)}\right]\right) - m\right]\times$$

$$\times\, g(x, y|J\Big) = -\delta(x-y)\,S_0[J]. \tag{41}$$

Определяя далее вакуумное среднее

$$u_\mu(x) = S_0^{-1}[J]\langle 0|TA_\mu(x)\,S[J]\,|0\rangle, \tag{42}$$

с учетом (40) и (41) получаем

$$\left[\mathrm{i}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - g\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - g\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\limits_x^y dz^\nu\frac{\delta}{\delta J^\nu(z)}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{i}gu^\mu(x) - \mathrm{i}g\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\limits_x^y dz^\nu u_\nu(z)\right]\right) - m\right]G(x, y|J) = -\delta(x-y). \tag{43}$$

Нетрудно убедиться в калибровочной инвариантности полученного уравнения.

Второе уравнение Швингера для вакуумного среднего (42) содержит спинорную функцию Грина при совпадающих аргументах. Экспоненциальный фактор при этом пропадает, и уравнение имеет стандартный вид [8]

$$u_\mu(x)=\int d^4y D^0_{\mu\nu}(x,\ y)\,[J^\nu(y)+\mathrm{i}g\,\mathrm{Sp}\,(\gamma^\nu G(y,\ y\mid J))]. \qquad (44)$$

Уравнения Дайсона возникают в результате преобразования (43) и (44) к интегральному виду. Перейдем к новой функциональной переменной $u_\mu(x)$. Воспользуемся соотношением

$$\frac{\delta}{\delta J^\nu(y)}=\int dz\,\frac{\delta u_\alpha(z)}{\delta J^\nu(y)}\,\frac{\delta}{\delta u_\alpha(z)}=-\int dz\,D_{\nu\alpha}(z,y)|\,\frac{\delta}{\delta u_\alpha(z)}, \qquad (45)$$

где $D_{\nu\alpha}$ — векторный пропагатор. Определим вершинную функцию

$$\Gamma_\mu(x,\ y|z)=\frac{\delta G^{-1}(x,\ y|u)}{\delta u^\mu(z)}. \qquad (46)$$

Тогда

$$\frac{\delta G(x,\ y|u)}{\delta u^\mu(z)}=\int dx'\,dy'\,G(x,\ x'|u)\,\Gamma_\mu(x',\ y'|z)\,G(y',\ y|u), \qquad (47)$$

и уравнение (43) принимает вид

$$\left[\mathrm{i}\hat{\partial}_x-m+g\hat{u}(x)+g\hat{\partial}_x\int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi)\right]G(x,\ y|u)+$$
$$+\mathrm{i}g\gamma^\mu\int dx'\,dy'\,dz\left[D_{\mu\nu}(x,\ z)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_x^y d\xi^\alpha D_{\alpha\nu}(\xi,\ z)\right]\times$$
$$\times G(x,\ x'|u)\,\Gamma^\nu(x',\ y'|z)\,G(y',\ y|u)=-\delta(x-y). \qquad (48)$$

Определяя КИ-векторное поле

$$B_\mu(x|y)=u_\mu(x)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi) \qquad (49)$$

и массовый оператор

$$M(x,\ y|u)=-\mathrm{i}g\gamma^\mu\int dx'\,dz\left[D_{\mu\nu}(x,\ z)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_x^y d\xi^\alpha D_{\alpha\nu}(\xi,\ z)\right]\times$$
$$\times G(x,\ x'|u)\,\Gamma^\nu(x',\ y|z), \qquad (50)$$

переписываем уравнение (48) в виде

$$[\mathrm{i}\,\hat{\partial}_x-m+g\hat{B}(x\mid y)]\,G(x,y\mid u)-\int dy'\times$$
$$\times M(x,y'\mid u)\,G(y',y\mid u)=-\delta(x-y). \qquad (51)$$

Уравнение (51) нетрудно переписать в интегральной форме:

$$G(x, y \mid u) = S_c(x-y) + g\int dy'\, S_c(x-y) \times \\ \times \hat{B}(y' \mid y)\, G(y', y \mid u) - \\ - \int dx'\, dy' S_c(x-x')\, M(x', y' \mid u)\, G(y', y \mid u). \qquad (52)$$

Массовый оператор (50) является КИ-объектом. В этом наиболее просто убедиться, если представить его в виде

$$M(x, y|u) = \mathrm{i}g\gamma^{\mu}\int dy' \langle 0|T\psi(x) \exp\left[\mathrm{i}g\int_x^{y'} d\xi A(\xi)\right] \times \\ \times \overline{\psi}(y')\, B_{\mu}(x|y')\, S[u]\, |0\rangle\, G^{-1}(y', y|u). \qquad (53)$$

Займемся теперь вторым уравнением Швингера (44). Вычисляя функциональную производную по $J_{\nu}(y)$ от его левой и правой частей, с учетом (45) получаем

$$D_{\mu\nu}(x, y) = D^0_{\mu\nu}(x, y) - \mathrm{i}g\int dz\, d\tau\, D^0_{\mu\alpha}(x, z) \times \\ \times \mathrm{Sp}\left[\gamma^{\alpha}\frac{\delta G(z, z|u)}{\delta u_{\beta}(\tau)}\right] D_{\beta\nu}(\tau, y). \qquad (54)$$

Или, определяя поляризационный оператор

$$P^{\alpha\beta}(z, \tau) = \mathrm{i}g\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\alpha}\frac{\delta G(z, z|u)}{\delta u_{\beta}(\tau)}\right] = \\ = \mathrm{i}g\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\alpha}\int dz'\, dz''\, G(z, z'|u)\Gamma^{\beta}(z', z''|\tau)\, G(z'', z|u)\right], \qquad (55)$$

записываем (54) в виде

$$D_{\mu\nu}(x, y) = D^0_{\mu\nu}(x, y) - \mathrm{i}g\int dz\, d\tau\, D^0_{\mu\alpha}(x, z)\, P^{\alpha\beta}(z, \tau)\, D_{\beta\nu}(\tau, y). \qquad (56)$$

Инфракрасная асимптотика (уравнения Дайсона — Швингера). Для исследования поведения КИ-пропагатора в инфракрасной области воспользуемся методом, разработанным в [38].

Точки на контуре будем параметризовать: $z_{\mu} = x_{\mu} + s(y - x)_{\mu}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. При $y = 0$ уравнение (43) запишем в виде

$$\left\{\mathrm{i}\gamma^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + g\left(\hat{\varphi}_{\mu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}x^{\nu}\int_0^1 ds\, \hat{\varphi}_{\nu}(sx)\right) - \\ - \mathrm{i}g\left(u_{\mu}(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}x^{\nu}\int_0^1 ds\, u_{\nu}(sx)\right)\right)\right] - m\right\} \times \\ \times G(x, 0|u) = -\delta(x), \qquad (57)$$

где

$$\hat{\varphi}_\mu(x)=\int d\tau\, D_{\mu\nu}(x-\tau)\frac{\delta}{\delta u_\nu(\tau)}. \tag{58}$$

Перейдем в импульсное пространство. Рассмотрим величину

$$\Phi_\mu(p|u)=\int dx\ \exp\ (\mathrm{i}px)\left[\hat{\varphi}_\mu(x)-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}x^\nu\int\limits_0^1 ds\,\hat{\varphi}_\nu(sx)\right)\right]\times$$
$$\times\, G(x,\ 0|u). \tag{59}$$

Определяя фурье-образ $\hat{\varphi}_\mu(k)$:

$$\hat{\varphi}_\mu(x)=\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\ \exp\,(-\mathrm{i}kx)\,\hat{\varphi}_\mu(k), \tag{60}$$

получаем

$$\Phi_\mu(p|u)=\int dx\frac{dk}{(2\pi)^4}\int\limits_0^1 ds\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\hat{\varphi}_\mu(k)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kxs}\hat{\varphi}_\mu(k)+$$
$$+\,\mathrm{i}x^\nu k_\mu s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ksx}\hat{\varphi}_\nu(k)]\,G(x,\ 0|u). \tag{61}$$

Производя в последнем слагаемом в (61) интегрирование по частям, получаем

$$\Phi_\mu(p|u)=\int\limits_0^1 ds\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\left[\hat{\varphi}_\mu(k)\,G\,(p-k|u)+k_\mu\frac{\partial\varphi_\nu(k)}{\partial k_\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\, G\,(p-sk|u)\right]. \tag{62}$$

Согласно [38], в инфракрасном пределе в выражении (62) можно сделать следующие приближения:

$$\Phi_\mu(p|u)\simeq\int\limits_0^1 ds\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\left[\hat{\varphi}_\mu(k)+k_\mu\frac{\partial\hat{\varphi}_\nu(k)}{\partial k_\nu}\right]G\,(p|u)=$$
$$=\int\frac{\partial k}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial k_\nu}(k_\mu\hat{\varphi}_\nu(k))\,G\,(p|u)=0. \tag{63}$$

Аналогично можно показать, что в инфракрасном пределе

$$\int dx\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\left[u_\mu(x)-\frac{\partial}{\partial x^\mu}x^\nu\int\limits_0^1 ds\,u_\nu(sx)\right]G\,(x,\ 0|u)\simeq 0. \tag{64}$$

Таким образом, в инфракрасной области $G\,(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p}-m)\,G\,(p)\simeq -1,\ p^2\simeq m^2, \tag{65}$$

т. е. в инфракрасной области ИК-функция Грина фермиона с прямолинейным контуром имеет простой полюс

$$G(p) = 1/(m - \hat{p}). \tag{66}$$

Отметим, что вопросы перенормировки, которые мы здесь не рассматриваем, в рамках теории возмущений исследовались в [39].

Инфракрасная асимптотика (функциональный метод). Поведение КИ-спинорного пропагатора в инфракрасной области на основе использования функционального интеграла рассматривалось в работах [33, 40, 41]. Функция Грина (31) записывается в виде функционального интеграла (35). Используя далее для $G(x, y \mid A)$ представление в виде [42]

$$G(x, y|A) = [i\hat{\partial}_x + g\hat{A}(x) + m]\, i \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \times$$

$$\times \int DB\delta\left(x - y - 2\int_0^s d\eta B(\eta)\right) \exp\left\{-i\int_0^s d\xi \left[B^2(\xi) - g\,(2B_\mu(\xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{\mu\nu} i\partial_x^\nu(\xi))\, A^\mu\left(x - 2\int_\xi^s d\eta B(\eta)\right)\right]\right\} \tag{67}$$

и делая стандартные приближения*, справедливые в инфракрасной области [41, 42] (важно подчеркнуть, что при этом мы не нарушаем калибровочную инвариантность пропагатора), получаем

$$G(x, y|C) = i\int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \int DB \exp\left[-i\int_0^s d\xi B^2(\xi)\right] \times$$

$$\times \left[i\,\hat{\partial}_x + m - i\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right] \delta\left(x - y - 2\int_0^s d\eta B(\eta)\right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{2} g^2 \int dw_1\, dw_2\, J^\mu(w_1)\, D_{\mu\nu}(w_1, w_2)\, J^\nu(w_2)\right]\Big|_{j=0}, \tag{68}$$

где

$$J_\mu(w) = j_\mu(w) + \int_{C_{xy}} dz^\mu \delta(w - z) +$$

$$+ 2\int_0^s d\xi B_\mu(\xi)\, \delta\left(w - x + 2\int_\xi^s d\eta B(\eta)\right), \tag{69}$$

---

* Мы пренебрегаем вкладом массивных фермионных петель, а также $\sigma_{\mu\nu}$ в (67).

а мера функционального интегрирования DB нормирована условием

$$\int DB \exp\left[-\mathrm{i}\int_0^s d\xi B^2(\xi)\right] = 1. \tag{70}$$

Отметим, что векторный пропагатор $D_{\mu\nu}$ в выражении (68) в силу калибровочной инвариантности может быть задан в любой удобной калибровке.

Перепишем (68) в виде

$$G(x, y|C) = \mathrm{i}\int_0^\infty ds \exp[-\mathrm{i}s(m^2 - \mathrm{i}0)] \int DB \exp\left[-\mathrm{i}\int_0^s d\xi B^2(\xi)\right] \times$$
$$\times [\mathrm{i}\hat{\partial}_x + m + g^2\hat{K}(x, y|B)]\, \delta\left(x - y - 2\int_0^s d\xi B(\xi)\right) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2} g^2 \Phi(x, y|B)\right], \tag{71}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\hat{K}(x, y|B) &= \int_{C_{xy}} dz^\nu \gamma^\mu D_{\mu\nu}(x - z) + \\
&+ 2\int_0^s d\xi \gamma^\mu D_{\mu\nu}\left[2\int_\xi^s d\eta B(\eta)\right] B^\nu(\xi); \\
\Phi(x, y|B) &= \int_{C_{xy}} dz_1^\mu \int_{C_{xy}} dz_2^\nu D_{\mu\nu}(z_1 - z_2) + \\
&+ 4\int_0^s d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 B^\mu(\xi_1) D_{\mu\nu}\left[2\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta B(\eta)\right] B^\nu(\xi_2) + \\
&+ 2\int_{C_{xy}} dz^\mu \int_0^s d\xi D_{\mu\nu}\left[z - x + 2\int_\xi^s d\eta B(\eta)\right] B^\nu(\xi) + \\
&+ 2\int_0^s d\xi \int_{C_{xy}} dz^\nu B^\mu(\xi) D_{\mu\nu}\left[x - 2\int_\xi^s d\eta B(\eta) - z\right].
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Используя параметризацию точек контура в виде (33), нетрудно установить трансляционную инвариантность функций (72) и вслед за этим функции Грина (71).

Переходя в (71) к импульсному представлению, выполняя сдвиг функционального аргумента

$$B_\mu(\xi) = p_\mu + \omega_\mu(v), \quad \xi = vs. \tag{73}$$

и пренебрегая в выражениях, соответствующих $\hat{K}$ и Φ, переменной ω_μ, получаем [41]

$$G(p|C) \simeq \mathrm{i} \int_0^\infty ds \exp[\mathrm{i}s(p^2 - m^2 + \mathrm{i}0)] \int D\omega \exp\left[-\mathrm{i}s \int_0^1 dv \omega^2(v)\right] \times$$
$$\times [\hat{p} + m + g^2 \hat{K}(2sp)] \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2} g^2 \overline{\Phi}(2sp)\right], \qquad (74)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{K}(2sp) &= \gamma^\nu \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz^\mu D_{\mu\nu}(z); \\ \overline{\Phi}(2sp) &= \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz_1^\mu \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz_2^\nu D_{\mu\nu}(z_1 - z_2). \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Замкнутый контур интегрирования в выражениях (75) состоит из исходного контура $C_{0,2sp}$ и отрезка прямой, соединяющего точки 0 и $2sp$. Его конфигурация аналогична приведенной на рис. 1. Если пренебречь в инфракрасном пределе вкладом функции $\hat{K}$ $(2sp)$, содержащей γ-матрицу и связанной со спиновыми эффектами, то из (74) получим

$$G(p|C) \simeq \mathrm{i}(\hat{p} + m) \int_0^\infty ds \exp(\mathrm{i}s(p^2 - m^2 + \mathrm{i}0)) \times$$
$$\times \left\langle 0 \middle| \mathcal{P} \exp\left[\mathrm{i}g \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz^\mu A_\mu(z)\right] \middle| 0 \right\rangle. \qquad (76)$$

Выражение (76) аналогично (39), полученному в модели Блоха — Нордсика, которая, как известно, воспроизводит функции Грина электродинамики в инфракрасной области.

Фурье-образ (76) в инфракрасном пределе может быть найден с помощью метода стационарной фазы. В результате в координатном пространстве получим

$$G(x-y|C) = G_0(x-y) \left\langle 0 \middle| \mathcal{P} \exp\left[\mathrm{i}g \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right] \middle| 0 \right\rangle, \qquad (77)$$

где G_0 $(x - y)$ — свободная функция Грина, а замкнутый контур Γ_{xy} изображен на рис. 1.

Таким образом, поведение КИ-фермионного пропагатора в инфракрасной области отличается от свободного мультипликативным фактором, равным вакуумному среднему вильсоновского оператора со специфическим контуром Γ_{xy}. Этот множитель, в котором сосредоточены все инфракрасные особенности, полностью аккумулирует зависимость от контура исходной функции Грина. Таким образом, инфракрасное поведение спинорного пропагатора тесным образом связано с поведением вильсоновской петли с контуром Γ_{xy}. Если исходный контур прямолинейный, то пропагатор согласно (76) имеет простой полюс (66).

Двумерная квантовая хромодинамика в 1/N-приближении. Рассмотрим следуя [32] кварковый пропагатор, построенный из КИ-полей фоковского класса с прямолинейным контуром интегрирования, который соединяет фиксированную точку пространства ξ и аргумент поля. Соответствующее глюонное поле $B_\mu(x|\xi)$ удовлетворяет условию

$$(x-\xi)^\mu B_\mu(x|\xi)=0. \tag{78}$$

Кварковый КИ-пропагатор в терминах исходного глюонного поля $A_\mu(x)$ и кваркового поля $q(x)$ имеет вид

$$G(x,\ y|\xi)=\mathrm{i}\left\langle 0\left|Tq(x)\mathscr{P}\exp\left[\mathrm{i}g\int\limits_x^y dz^\mu A_\mu(z)\right]\bar{q}(x)\right|0\right\rangle. \tag{79}$$

Контур интегрирования в (79) представляет собой ломаную линию, изображенную на рис. 2.

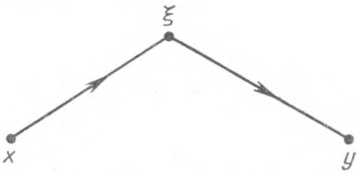

Рис. 2. Контур интегрирования в КИ-кварковом пропагаторе

Очевидно, что функция (79) трансляционно-неинвариантна. Трансляционная инвариантность восстанавливается в пределе

$$\xi_\mu=A\eta_\mu,\quad A\to\infty, \tag{80}$$

где η — некоторый вектор, выделяющий направление. КИ — глюонный пропагатор полей $B_\mu(x\mid\xi)$, в свободном случае имеет вид*

$$D_{\mu\nu}(x,\ y|\xi)=D_{\mu\nu}(x,\ y)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\limits_x^\xi dz^\alpha D_{\alpha\nu}(z,\ y)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y^\nu}\int\limits_y^\xi dw^\beta D_{\mu\beta}(x,\ w)+\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial y^\nu}\int\limits_y^\xi dz^\alpha\int\limits_y^\xi dw^\beta D_{\alpha\beta}(z,\ w). \tag{81}$$

Все контурные интегралы в (81) берутся по прямолинейному отрезку, а функция $D_{\mu\nu}(x,y)$ есть глюонный пропагатор, взятый в произвольной калибровке.

---

* Тривиальные цветовые индексы мы опускаем.

Функция Грина (81) обладает следующим свойством:

$$D_{\mu\nu}(x,\ y|\xi)=D_{\mu\nu}(x-\xi,\ y-\xi|0). \tag{82}$$

Так же как и для спинорного пропагатора, трансляционная инвариантность восстанавливается в пределе $\xi\to\infty$.

Получим явное выражение для КИ-глюонного пропагатора. Для этого в правую часть (81) следует подставить $D_{\mu\nu}(x,\ y)$ в произвольной калибровке. Например, в калибровке $A_0=0$ в двумерном пространстве-времени имеем

$$D_{\mu\nu}(x,\ y)=-g_{\mu1}g_{\nu1}\delta(x_1-y_1)\left[\frac{1}{2}|x_0-y_0|+B(x_0-y_0)-A\right]. \tag{83}$$

Произвольные постоянные A и B в (83) отражают остаточный калибровочный произвол. Обычно их выбирают равными нулю, прибегая к некоторым дополнительным аргументам. В нашем случае при подстановке (83) в (81) зависимость от A и B пропадает. Таким образом, КИ-глюонный пропагатор не имеет неоднозначностей, характерных для калибровочно-неинвариантной формулировки.

Функция (81) имеет вид

$$D_{\mu\nu}(x,\ y|\xi)=\frac{1}{4}[(\tilde{\xi}-\tilde{x})_\mu(\tilde{\xi}-\tilde{y})_\nu+(\tilde{\xi}-\tilde{y})_\mu(\tilde{\xi}-\tilde{x})_\nu]\,\delta[(\xi-x)(\tilde{\xi}-\tilde{y})]\times$$
$$\times\left[\frac{\xi_0-y_0}{\xi_0-x_0}\,\theta\left(\frac{\xi_0-x_0}{\xi_0-y_0}-1\right)+\frac{\xi_0-x_0}{\xi_0-y_0}\,\theta\left(\frac{\xi_0-y_0}{\xi_0-x_0}-1\right)\right]. \tag{84}$$

Здесь для любого 2-вектора z введено обозначение

$$\tilde{z}_\mu=\varepsilon_\mu^\nu z_\nu=(z_1,\ z_0). \tag{85}$$

Свободный пропагатор (84) имеет несколько необычный вид по сравнению с наиболее часто применяемыми пропагаторами в калибровке светового фронта $A_-=0$ или в аксиальной калибровке $A_1=0$, из выражений для которых легко виден кулоновский закон взаимодействия зарядов в двумерном пространстве-времени. Однако нетрудно убедиться, что выражение для КИ-энергии взаимодействия зарядов, записанное через пропагатор (84), можно преобразовать к стандартному виду с обычным, линейно растущим с расстоянием потенциалом взаимодействия зарядов.

Уравнение для КИ-кваркового пропагатора (79) в главном порядке $1/N$-приближения имеет вид [32]

$$\hat{M}(x,\ y|\xi)=-i\tilde{g}^2D_{\mu\nu}(x,\ y|\xi)[\gamma^\mu\hat{G}(x,\ y|\xi)\gamma_\nu], \tag{86}$$

где $\widetilde{g}^2 = (2g)^2 \frac{N^2-1}{N}$; $D_{\mu\nu}$ определяется (84), а $\hat{M}$ — массовый оператор, отвечающий КИ-функции Грина (79).

Для получения трансляционно-инвариантных результатов устремим $\xi \to \infty$ согласно (80). При этом функция (84) принимает вид

$$D_{\mu\nu}(x,\ y|A\eta) = \frac{1}{2} A\widetilde{\eta}_\mu \widetilde{\eta}_\nu \delta[\widetilde{\eta}(x-y)] + O(A^0). \tag{87}$$

Таким образом, ведущий по A член в $D_{\mu\nu}$ является трансляционно-инвариантным. Здесь следует отметить, что он, однако, не дает вклада в такую физическую величину, как, например, энергия. Вклад в нее определяется следующим членом разложения функции $D_{\mu\nu}(x, y \mid A\eta)$, пропорциональным A^0. Как будет показано ниже, для нашей цели выписанный явно первый член разложения по A в (87) играет определяющую роль.

В импульсном пространстве уравнение (86) принимает вид

$$\hat{M}_A(p) = -\frac{i\widetilde{g}^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{\eta} \widetilde{G}_A\left(p + \frac{1}{A}\widetilde{\eta}\tau\right)\hat{\widetilde{\eta}} =$$

$$= -\frac{i\widetilde{g}^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{\widetilde{\eta}} \frac{1}{M_A\left(p + \frac{1}{A}\widetilde{\eta}\tau\right) + m - \left(\hat{p} + \frac{1}{A}\widetilde{\eta}\tau\right) - i\varepsilon} \hat{\widetilde{\eta}}. \tag{88}$$

Рассмотрим теперь различные случаи выбора направления η. При $\eta^2 = 0$ (точка ξ стремится к бесконечности вдоль светового конуса) уравнение (88) можно переписать в виде

$$\hat{M}(p_-,\ p_+) = -\frac{i\widetilde{g}^2}{2\sqrt{2}} A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma_- M(p_-,\ p_+ + \tau) + m - (p_-\gamma_+ + (p_+ + \tau)\gamma_-) - i\varepsilon} \gamma_-. \tag{89}$$

Здесь мы ввели стандартные переменные светового фронта

$$\left.\begin{aligned} p_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 \pm p_1); \\ \gamma_-^2 &= \gamma_+^2 = 0; \quad \{\gamma_-,\ \gamma_+\} = 2 \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

и положили для конкретности $\eta = (1,1)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (89) имеет решение вида

$$\hat{M}(p_-, p_+) = \gamma_- M(p_-, p_+) \equiv \gamma_- M(p_-). \tag{91}$$

При этом для интеграла в правой части (89) справедлива следующая цепочка выкладок:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \frac{1}{\gamma_- M(p_-,\ p_+ + \tau) + m - (p_-\gamma_+ + (p_+ + \tau)\gamma_-) - i\varepsilon} \gamma_- =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \frac{m + p_-\gamma_+ + \gamma_-(\tau - M(p_-,\ \tau))}{m^2 - 2p_-(\tau - M(p_-;\ \tau)) - i\varepsilon} \gamma_- =$$

$$= 2\gamma_- p_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \frac{1}{m - 2p_-\tau - i\varepsilon} = i\gamma_- p_- \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \delta(p_-\tau - m) =$$

$$= \frac{i}{2} \gamma_- \operatorname{sgn} p_-. \tag{92}$$

Таким образом, точное решение уравнения (89) в этом случае имеет вид (91), где

$$M(p_-) = \frac{\tilde{g}^2}{4\sqrt{2}} A \operatorname{sgn} p_-.$$

При $A \to \infty$ полюс у КИ-спинорной функции Грина уходит на бесконечность, что можно трактовать как конфайнмент отдельного кварка.

При $\eta^2 \neq 0$ решим уравнение (88) в приближении Блоха — Нордсика, которое, как известное в случае электродинамики, воспроизводит теорию в инфракрасной области. Согласно этому приближению заменим в (88) γ-матрицы на векторы: $\gamma_\mu \to u_\mu$, где $u^2 = 1$. Тогда уравнение (88) примет вид

$$M_A(p) = -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} (\tilde{\eta}u)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{M_A\left(p + \frac{1}{A}\tilde{\eta}\tau\right) + m - (pu) - \frac{1}{A}(\tilde{\eta}u)\tau - i\varepsilon}. \tag{93}$$

Уравнение (93) имеет решение, не зависящее от p:

$$M_A(p) = M_A = \text{const}. \tag{94}$$

Действительно, в этом случае

$$M_A = -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} (\tilde{\eta}u)^2 + A \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{M_A + m - (pu) - (\tilde{\eta}u)\tau - i\varepsilon} =$$

$$= \frac{\tilde{g}^2}{4\pi} A (\tilde{\eta}u)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\delta(M_A + m - pu - u\tilde{\eta}\tau) = +\frac{1}{4}\tilde{g}^2(\tilde{\eta}u) A. \tag{95}$$

Таким образом, $M_A \sim A$, и при $A \to \infty$ полюс пропагатора уходит на бесконечность, что так же, как и при $\eta^2 = 0$, отвечает конфайнменту кварка.

Отметим, что все уравнения в предлагаемом подходе хорошо определены в инфракрасной области и трудностей, связанных с различными способами инфракрасной регуляризации, здесь уже не возникает. Требование трансляционной инвариантности приводит к естественной предельной процедуре: $\xi \to \infty$, в результате чего КИ-массовый оператор кварка также стремится к бесконечности. Наконец, подчеркнем, что носитель обобщенной функции (84) сосредоточен на прямой, соединяющей точки x и y. Следовательно, при переходе к импульсному пространству ненулевой вклад дадут только прямолинейные контуры интегрирования. Таким образом, так же как и в вышерассмотренных моделях, в КХД$_2$ в пользу геометрически выделенного прямолинейного контура имеются и динамические аргументы. Приведенный анализ позволяет предположить, что выделенность прямолинейного контура носит модельно-независимый характер.

В заключение этого раздела отметим, что подобно пропагатору могут быть рассмотрены и КИ-волновые функции. Динамические уравнения для релятивистских двухчастичных волновых функций были получены в [43].

3. δ^2-КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Начнем со случая взаимодействия фотонов с внешним полем. Рассмотрим обычный континуальный интеграл в фазовом пространстве в кулоновской калибровке $\partial^i A_i = 0$ [22, 23]:

$$Z[j] = \int D\pi DA \delta(\pi_0)\, \delta(\partial^i \pi_i + g j_0)\, \delta(\partial^i A_i)\, \delta(\partial^i \partial_i A_0 + j_0) \times$$
$$\times \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \pi^i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + j^\mu A_\mu \right] \right\}. \tag{96}$$

Подчеркнем, что наша стартовая точка (96) фиксируется однозначно, так как после наложения на поле калибровки $\partial^i A_i \approx 0$ в фазовом пространстве второе калибровочное условие $\partial^i \partial_i A_0 + j_0 \approx 0$ с необходимостью следует из первого на гамильтоновых уравнениях движения [23], подобно первичной $\pi_0 \approx 0$ и вторичной $\partial^i \pi_i + j_0 \approx 0$ связям. Все обозначения в (96) стандартные, поэтому расшифровывать их не будем. Подчеркнем лишь, что исходный функционал (96) уже содержит две δ-функции, подчиняющие векторное поле A_μ как калибровочному условию $\partial^i A_i = 0$, так и закону Гаусса $\partial^i \partial_i A_0 + j_0 = 0$. Выполняя интегрирование по импульсным переменным, приходим к выражению

$$Z[j] = \int DA\delta(\partial^i A_i)\,\delta(\partial^i\partial_i A_0 + j_0) \times$$
$$\times \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu\right]\right\}. \tag{97}$$

Стандартный путь преобразования (96) к конфигурационному пространству оставляет тем не менее лишь δ-функцию от калибровочного условия (δ^1-квантование), а δ-функция, подчиняющая переменную A_0 закону Гаусса, не фигурирует. Переход δ^2-функционала (97) в стандартный δ^1-функционал основан на том простом факте, что выражение $\exp\left[-\frac{i}{2}(b, K^{-1}b)\right.$ можно записать двумя способами:

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(b,\ K^{-1}b)\right] = \int Dx \exp\left\{i\left[\frac{1}{2}(x,\ Kx) + (bx)\right]\right\} \tag{98}$$

или

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(b,\ K^{-1}b)\right] = \int Dx\delta(x - x_0)\exp\left\{i\left[\frac{1}{2}(x,\ Kx) + (bx)\right]\right\}, \tag{99}$$

где x_0 — решение классического уравнения движения

$$Kx_0 + b = 0. \tag{100}$$

Таким образом, для перехода от выражения (97) к δ^1-функционалу, содержащему только лишь $\delta(\partial^i A_i)$, следует, решив уравнение Гаусса $\partial^2 A_0 = j_0$ в виде $A_0 = \frac{1}{\partial^2} j_0$, что, кстати, предполагает убывание поля A_0 на бесконечности, и сняв с помощью $\delta\left(A_0 - \frac{1}{\partial^2} j_0\right)$ интеграл по A_0, записать полученное выражение в виде функционального интеграла типа (98), назвав при этом новую вспомогательную переменную интегрирования опять-таки полем A_0. Ясно, что при этом мы искусственно расширяем область интегрирования в конфигурационном пространстве полей A_μ и выходим за поверхность, которая диктуется квантованием в фазовом пространстве и определяется двумя условиями: калибровкой и законом Гаусса.

Вместе с тем понятно, что как выражение (98), так и выражение (99) вполне допустимы, т. е. δ^1- и δ^2-функционалы на данном этапе рассмотрения фактически эквивалентны*. Однако, как мы увидим ниже, при переходе к другим калибровкам, когда переменная A_0 испытывает калибровочные преобразования, δ^1- и δ^2-способы квантования дают разные результаты. Это происходит из-за того, что потеря закона Гаусса при искусственном расширении конфигурационного пространства интегрирования в δ^1-квантовании приводит к необходимости накладывать дополнительное условие на допустимые

---

* Вопрос о граничных условиях мы пока оставляем за рамками нашего анализа.

векторы состояния (для калибровок, не полностью фиксирующих калибровочный произвол). Так, в δ^1-квантовании в калибровке $A_0 = 0$ необходимо искусственно наложить закон Гаусса на векторы состояния [21].

С помощью сдвига переменной интегрирования: $A_0 \to A_0 + \partial^{-2} j_0$ выражение (97) переписывается в виде

$$Z[j] = \int DA\delta(\partial^i A_i)\,\delta(A_0)\exp\{\mathrm{i}\,S_{\mathrm{ef}}(A, j)\}, \tag{101}$$

где

$$S_{\mathrm{ef}} = S_0 + S_{\mathrm{int}}^{\mathrm{ef}} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}j^\mu\delta_{\mu\nu}^c j^\nu + j^\mu A_\mu\right];$$

$$\delta_{\mu\nu}^c = \eta_\mu\eta_\nu|\partial^2, \quad \eta_\mu \equiv (1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Таким образом, в отличие от обычного подхода эффективное действие в (101) содержит мгновенное кулоновское взаимодействие зарядов $\frac{1}{2}\left(j_0, \frac{1}{\partial^2}j_0\right)$, а функциональное интегрирование осуществляется только лишь по физическим степеням свободы векторного поля — поперечным фотонам *. Соответствующий (101) производящий функционал S-матрицы (задающий S-матрицу вне массовой поверхности) имеет вид

$$S(A) = \exp(\mathrm{i}S_0(A))\int DB\delta(\partial^i(A_i - B_i))\,\delta(\partial^2(A_0 - B_0)) \times$$
$$\times \exp\left\{-\mathrm{i}\int d^4x A^\mu K_{\mu\nu}^{\mathrm{tr}} B^\nu + \mathrm{i}S_{\mathrm{ef}}\right\}, \tag{102}$$

где

$$K_{\mu\nu}^{\mathrm{tr}} = g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu.$$

Переход к калибровке $\Phi A = 0$ осуществляется в (102) с помощью невырожденного преобразования (см., например, (45, 46])**:

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\frac{1}{\partial^2}[\Phi A - \partial^i A_i]. \tag{103}$$

В результате $S(A)$ примет вид

$$S(A) = \exp[\mathrm{i}S_0(A)]\int DB\delta[\Phi(A - B)]\,\delta[L(A - B)] \times$$
$$\times \exp\left\{-\mathrm{i}\int d^4x A^\mu K_{\mu\nu}^{\mathrm{tr}} B^\nu + \mathrm{i}S_{\mathrm{ef}}\right\}, \tag{104}$$

где

$$L_\mu = K_{0\mu}^{\mathrm{tr}}.$$

---

* В связи с этим см. [44], где использовался операторный метод квантования.

** Φ_μ может быть как вектором, например $\Phi_\mu = n_\mu$, $\Phi_\mu = x_\mu$ (калибровочное условие Фока — Швингера $x_\mu A^\mu = 0$), так и оператором, например $\Phi_\mu = \partial_\mu$, а также любой их безразмерной линейной комбинацией.

Соответствующий (104) производящий функционал функций Грина имеет вид

$$Z[j]=\int DA\delta(\Phi A)\,\delta(LA)\exp\left\{\mathrm{i}\left[S(A)+\int d^4x\left(\frac{1}{2}j^\mu\delta^c_{\mu\nu}j^\nu+j^\mu A_\mu\right)\right]\right\}=$$
$$=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4xj^\mu\delta^c_{\mu\nu}j^\nu\right\}Z^{\mathrm{tr}}[j]. \tag{105}$$

Функционал $Z^{\mathrm{tr}}[j]$ в (105) определяет пропагатор поперечных фотонов $D_{\mu\nu}$ в калибровке $\Phi A=0$:

$$Z^{\mathrm{tr}}[j]=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int dx\,dyj^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,j^\nu(y)\right\}. \tag{106}$$

Тогда согласно (105) пропагатор, фигурирующий в правилах диаграмной техники $\Delta_{\mu\nu}$, равен

$$\Delta_{\mu\nu}=D_{\mu\nu}+\delta^c_{\mu\nu}. \tag{107}$$

Пропагатор $D_{\mu\nu}$ легко может быть вычислен для всех практически используемых калибровок. Нетрудно найти его связь с пропагатором в δ^1-схеме. А именно если $\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$ пропагатор, возникающий в стандартном δ^1-подходе в некоторой калибровке, то пропагатор $D_{\mu\nu}$ в той же калибровке связан с $\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$ соотношением

$$D_{\mu\nu}=\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}-\frac{[\widetilde{\Delta}_{\mu\alpha}L^\alpha]\,[L^\beta\widetilde{\Delta}_{\beta\nu}]}{[L^\mu\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}L^\nu]}. \tag{108}$$

При выборе калибровки $nA=0$ находим

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{1}{k^2+\mathrm{i}0}\left[g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu}{(nk)}+n^2\frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n\eta)\,k^2}{(nk)\,[\eta^2k^2-(\eta k)^2]}(k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu)-\frac{(n\eta)^2\,k^2k_\mu k_\nu}{(nk)^2\,[\eta^2k^2-(\eta k)^2]}-\frac{k^2\eta_\mu\eta_\nu}{\eta^2k^2-(\eta k)^2}\right]. \tag{109}$$

Пропагатор (109) одновременно удовлетворяет двум условиям: $n^\mu D_{\mu\nu}=0$ и $L^\mu D_{\mu\nu}=0$. Отметим, что последнее слагаемое в (109) есть не что иное, как $\delta^c_{\mu\nu}$. Таким образом, в пропагаторе $\Delta_{\mu\nu}$, который определен согласно (107) и фигурирует в фейнмановских правилах диаграммной техники, кулоновский член отсутствует. Это, конечно, является необходимым с точки зрения калибровочной инвариантности. Однако мы видим, что пропагатор $\Delta_{\mu\nu}$ [выражение (109) с отброшенным последним слагаемым], возникающий в предлагаемом δ^2-подходе, существенно отличается от стандартного пропагатора $\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$

в калибровке $nA = 0$ [первые три слагаемых в выражении (109)]. Совпадение пропагаторов $\Delta_{\mu\nu} = \widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$ происходит при $n\eta = 0$, например, для калибровки $A_3 = 0$. Но именно для пространственно-подобных n_μ стандартный пропагатор $\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$ не приводит к противоречию в вычислениях вильсоновской петли. Обратим внимание и на тот факт, что унитарность S-матрицы в стандартном подходе также удается явно продемонстрировать только для пространственно-подобных n_μ [47].

В случае калибровки $A_0 = 0$ ($n_\mu = \eta_\mu$) там, где δ^1-подход встречает трудности, пропагатор $\Delta_{\mu\nu}$ не совпадает со стандартным $\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}$, а переходит в обыкновенный кулоновский $\Delta^c_{\mu\nu}$, что автоматически обеспечивает согласованность расчета вильсоновской петли в различных калибровках.

Таким образом, если δ^1-подход приводит к калибровке $nA = 0$ к пропагатору одному и тому же [с точностью до обхода полюсов по $(n\,k)$] для всех направлений n_μ, δ^2-квантование существенно различает времени- и пространственно-подобные векторы n_μ.

Производящий δ^2-функционал Грина в **КЭД** имеет вид

$$Z[j;\ \eta,\ \eta] = \int D[\bar{\psi}\psi]\,DA\delta(\Phi A)\,\delta(\partial^i F_{i0} + J_0)\times$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\left[S(A;\ \psi,\ \psi) + \int d^4x\,(j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\bar{\eta})\right]\right\}, \tag{110}$$

где $S(A;\bar{\psi},\psi)$ — полное действие в КЭД, а $J_\mu = g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + j_\mu$. Вторая δ-функция (110) обеспечивает выполнение закона Гаусса $\partial^i F_{i0} + J_0 = 0$ под знаком функционального интеграла. Выражение (110) можно переписать в другом, эквивалентном виде

$$Z[j;\ \bar{\eta},\ \eta] = \int D[\bar{\psi}\psi]\,DA\delta(\Phi A)\,\delta(\partial^i F_{i0})\exp\left\{\mathrm{i}S(A;\ \bar{\psi},\ \psi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(J_0\partial^{-2}J_0) + \int d^4x\,[j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]\right\}. \tag{111}$$

Вторая δ-функция в (111) обеспечивает выполнение свободного закона Гаусса, а в действии дополнительно появляется кулоновский член.

Модель Блоха — Нордсика. Вычислим калибровочно-инвариантный спинорный пропагатор

$$G(x,\ y|C) = \mathrm{i}\mathscr{P}\exp\left\{\mathrm{i}g\int\limits_{C_{xy}} dz^\mu\,\frac{\delta}{\delta j_\mu(z)}\,\frac{\delta^2 Z[j;\ \bar{\eta},\ \eta]}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\right\}\Bigg|_{j=0,\ \eta=\bar{\eta}=0}. \tag{112}$$

Интегрирование в показателе экспоненты, обеспечивающей калибровочную инвариантность выражения (112), выполняется по произвольному контуру, соединяющему точки x и y.

Воспользовавшись производящим функционалом (111) и записывая кулоновский член в действии в виде функционального интеграла до переменной Λ, после интегрирования по спинорным полям получим

$$G(x,\ y|C)=\int D\Lambda \exp\left[-\frac{i}{2}(\Lambda,\ \partial^2\Lambda)\right]\int DA\delta(\Phi A)\,\delta(LA)\times$$
$$\times\exp\left\{iS_0(A)+ig\int\limits_{C_{xy}} dz^\mu(A_\mu+\eta_\mu\Lambda)\right\}G(x,\ y|A_\mu+\eta_\mu\Lambda), \quad (113)$$

где $G(x,\ y\mid B_\mu)$ — функция Грина во внешнем поле B_μ. При выводе (113) мы, как и ранее, учли, что детерминант, возникающий в результате интегрирования по спинорным полям, равен единице ввиду отсутствия поляризации вакуума в модели Блоха — Нордсика. Выражение для функции Грина во внешнем поле может быть выписано явно:

$$G(x,\ y|A_\mu+\eta_\mu\Lambda)=i\int\limits_0^\infty d\nu\delta(x-y-u\nu)\exp\left[-i\nu(m^2-i0)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-ig\int\limits_x^y dz^\mu(A_\mu+\eta_\mu\Lambda)\right]. \quad (114)$$

Контурное интегрирование в (114) выполняется по отрезку прямой, соединяющему точки x и y. Подставляя (114) в (113), получаем

$$G(x,\ y\mid C)=G_0(x-y)\,W_c[\Gamma_{xy}]\,W_{tr}[\Gamma_{xy}], \quad (115)$$

где G_0 — свободный пропагатор, а $W_c[\Gamma_{xy}]$ и $W_{tr}[\Gamma_{xy}]$ — вильсоновские петли, определяемые соответственно кулоновским членом и поперечными фотонами:

$$\left.\begin{aligned}W_c[\Gamma_{xy}]&=\int D\Lambda\exp\left\{-\frac{i}{2}(\Lambda,\ \partial^2\Lambda)+ig\oint\limits_{\Gamma_{xy}}dz^0\Lambda\right\};\\ W_{tr}[\Gamma_{xy}]&=\int DA\delta(\Phi A)\,\delta(LA)\exp\left\{iS_0[A]+ig\oint\limits_{\Gamma_{xy}}dz^\mu A_\mu(z)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

Контур интегрирования Γ_{xy} в (116) изображен на рис. 1.

Квантовая электродинамика. Рассмотрим в рамках δ^2-квантования поведение КИ-спинорного пропагатора (112) в инфракрасной области. Воспользуемся корпускулярным представлением для функции Грина во внешнем поле [42]

$$G(x,\ y|B)=[i\hat\partial_x+m+g\hat B(x)]\,i\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{\substack{z(\tau)=x\\ z(0)=y}}Dz\exp\left[ig\int\limits_{\gamma_{yx}}dz^\mu B_\mu(z)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{i}{2}\int\limits_0^\tau d\xi\,(\dot z^2+m^2-i\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu B^\mu)\right]. \quad (117)$$

Интегрирование в (117) проводится по всем путям γ_{yx}, соединяющим точки y и x. Пренебрегая далее, как обычно, поляризацией вакуума и членом $\sigma_{\mu\nu}$, получаем

$$G(x,\ y|C)=\int DA\delta(\Phi A)\,\delta(LA)\exp\left\{\mathrm{i}S_0[A]+\mathrm{i}g\oint\limits_{\Gamma_{xy}}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right\}\times$$

$$\times\int D\Lambda\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda,\ \partial^2\Lambda)+\mathrm{i}g\oint\limits_{\Gamma_{xy}}dz^{\mu}\eta_{\mu}\Lambda(z)\right\}\times$$

$$\times\left\{\mathrm{i}\hat{\partial}_x+m+g\gamma^{\mu}\left[A_{\mu}(x)+\eta_{\mu}\Lambda(x)+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\int\limits_x^y dz^{\mu}(A_{\mu}(z)+\eta_{\mu}\Lambda(z))\right]\right\}\times$$

$$\times\,\mathrm{i}\int\limits_0^{\infty}d\tau\int\limits_{\substack{z(\tau)=x\\ z(0)=y}}Dz\exp\left\{\mathrm{i}g\int\limits_{\bar{\gamma}_{yx}}dz^{\mu}[A_{\mu}(z)+\eta_{\mu}\Lambda(z)]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\limits_0^{\tau}d\xi(\dot{z}^2+m^2)\right].\qquad(118)$$

Контур $\bar{\gamma}_{yx}$ получится замыканием контура γ_{yx} отрезком прямой, соединяющим точки x и y, а контур Γ_{xy} — тот же, что и на рис. 1. Пренебрегая членами, содержащими γ-матрицы, и замечая, что в инфракрасной области основной вклад дают прямолинейные контуры γ_{yx}, из (118) получаем в точности формулу (115).

В рассмотренном абелевом случае факторизация вильсоновских петель, соответствующих статической части — кулоновскому взаимодействию и динамической части — поперечным фотоном, носит искусственный характер. Однако в неабелевом случае аналогичное разделение может иметь принципиальное значение.

Двумерные модели. δ^2-Квантование позволяет несколько по-другому взглянуть на двумерные калибровочные теории. Дело в том, что в двух измерениях отсутствуют поперечные фотоны, их пропагатор $D_{\mu\nu}=0$ [в чем нетрудно убедиться непосредственно, используя выражение (109)]. Таким образом, интегрирование по векторному полю в двумерии тривиально. Функционал (111) переписывается в виде

$$Z[j;\ \bar{\eta},\ \eta]=\int D[\bar{\psi}\psi]\exp\left\{\mathrm{i}S_0(\bar{\psi},\ \psi)+\frac{1}{2}(J_0,\ \partial_1^{-2}J_0)+(\bar{\eta}\psi)+(\bar{\psi}\eta)\right\}.\qquad(119)$$

Функционал (119) описывает фермионы, взаимодействующие друг с другом посредством закона Кулона. Причем выражение (119) будет одним и тем же для всех калибровок $\Phi A=0$.

Таким образом, δ^2-квантование не оставляет в двух измерениях никакого калибровочного произвола. В безмассовом случае (модель

Швингера) бозонизация (119) приводит к массивному скалярному полю с массой $g/\sqrt{\pi}$.

В неабелевом случае δ^2-квантование изменяет духовый сектор теории. Так, в случае КХД$_2$ S-матрица имеет вид (временные асимптотики векторного поля удовлетворяют стандартным фейнмановским условиям излучения)

$$S = \int\limits_{A \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} A_{\substack{\text{out}\\ \text{in}}}} DA\delta(\nabla^{\mu}\mathcal{F}_{\mu0})\,\delta(\Phi^{\mu}A_{\mu})\exp[\mathrm{i}S(A)], \qquad (120)$$

где S — неабелево действие, а ∇_{μ} — обычная ковариантная производная. Легко видеть, что во всех калибровках $\Phi A = 0$ и, в частности, в калибровке Лоренца $\partial A = 0$ отсутствуют духи и самодействие глюонных полей, а пропагатор $\Delta_{\mu\nu} = -\eta_{\mu}\eta_{\nu}/\mathbf{k}^2$ одинаков для всех выборов оператора Φ_{μ}, фиксирующего калибровку.

В заключение этого раздела отметим, что те же результаты получаются, если в качестве исходной калибровки в фазовом пространстве для δ^2-квантования использовать не кулоновскую, а любую другую калибровку, совместную с фазовым пространством, например условие $A_3 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты данной работы. Показано, как в рамках лагранжева формализма построить КИ-полевые переменные, которые являются КИ-объектами. Калибровочная независимость новых полей по отношению к локальным калибровочным преобразованиям исходных полей не следует рассматривать как полное избавление теории от калибровочного произвола. Функциональный произвол по-прежнему остается. Он связан с зависимостью новых полей от контура. Однако множество КИ-полей не находится во взаимооднозначном соответствии с множеством полей, определенных в различных калибровках. Так, например, в неабелевом случае невозможно построить КИ-поле с помощью проектирования на поля в тех калибровках, для которых имеются неоднозначности Грибова. Кроме того, переход к контурно-зависимым переменным позволяет привлечь для анализа соображения геометрического характера. Поэтому при вычислении калибровочно-зависимых величин, например функций Грина, можно ставить вопрос об оптимальном выборе контура или, иначе, об оптимальном выборе калибровки. В электродинамических вычислениях широко используется калибровка Соловьева — Йенни, обладающая по сравнению с иными калибровками рядом преимуществ. Развиваемый здесь формализм позволяет раскрыть «секрет» этой калибровки, продемонстрировать ее выделенность с точки зрения симметрийного геометрического анализа. Та же идея применяется и для исследования спинорного пропагатора в ряде калибровочных моделей. При этом оказалось, что геометрически выделенный прямолинейный контур во всех рассмотренных калибровочных теориях обосновывается также и с точки зрения динамики.

Характерным для введенных векторных полей является существование так называемой формулы обращения, однозначно выражающей эти поля через тензоры напряженности, и вторичного калибровочного условия, которое для поля Янга — Миллса имеет вид условия Лоренца, записанного в терминах контурных производных.

В работе исследована зависимость от контура КИ-спинорного пропагатора. В модели Блоха — Нордсика и в инфракрасной области квантовой электродинамики показано, что вся зависимость от контура и все инфракрасные особенности сосредоточены в мультипликативном факторе — вильсоновской петле со специфическим контуром, образованным исходным контуром в пропагаторе и прямолинейным отрезком. Таким образом, демонстрируется, что поведение спинорного пропагатора в инфракрасной области тесно связано с поведением вильсоновской петли.

В абелевом случае инфракрасная область исследуется как на основе полученных в работе уравнений Дайсона — Швингера для КИ-пропагатора, так и с помощью функциональных методов. Показано, что в случае прямолинейного контура КИ-спинорный пропагатор имеет особенность в виде простого полюса.

В КХД$_2$ рассмотрен кварковый пропагатор в рамках $1/N$-разложения. Важной особенностью предлагаемого подхода является тот факт, что возникающие в нем уравнения не требуют дополнительной инфракрасной регуляризации, неоднозначность выбора которой в стандартном подходе приводила к существенным трудностям. В предлагаемом подходе существует естественная предельная процедура, приводящая к восстановлению симметрий двух типов. Во-первых, восстанавливается калибровочная инвариантность глюонного и кваркового полей; во-вторых, функции Грина приобретают трансляционную инвариантность. В результате такого предельного перехода полюс кваркового пропагатора отодвигается на бесконечность, что можно трактовать как конфайнмент отдельного кварка.

В работе предлагается новый метод квантования калибровочных полей, названный нами δ^2-методом. Мы исходим из стандартного функционального интеграла в фазовом пространстве и показываем, что переход к конфигурационному пространству может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла возникают две функциональные δ-функции, одна из которых стандартная и обеспечивает выполнение калибровочного условия, а вторая обеспечивает наложение закона Гаусса. Мы демонстрируем способ перехода к произвольным линейным калибровкам и получаем новый пропагатор векторного поля. В случае широко применяемых калибровок $n^\mu A_\mu = 0$ новый пропагатор различает времени- и пространственно-подобные векторы n_μ и не приводит к противоречию в вычислении вильсоновской петли, а также проливает свет на трудности в непосредственном доказательстве унитарности S-матрицы для времениподобных векторов n_μ. В рамках δ^2-метода рассматривается ряд калибровочных моделей теории поля. В частности, в двумерных моделях в силу отсутствия поперечных фотонов δ^2-подход не оставляет никакого калибровочного произвола и в неабелевом случае меняет духовый сектор теории.

Авторы глубоко признательны Н. Б. Скачкову, в соавторстве с которым были получены многие из изложенных в этом обзоре результатов.

Мы благодарны также В. Г. Кадышевскому и В. Н. Капшаю, Л. В. Прохорову, А. В. Радюшкину, А. А. Славнову и С. А. Фролову за интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mandelstam S.**//Phys. Rev. 1979. Vol. D20. P. 3223—3238.
2. **Pagels H.**//Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 2991—3002.
3. **Baker M., Ball J. S., Zachariasen F.**//Nucl. Phys. 1981. Vol. B186. P. 531—572; 1983. Vol. B229. P. 445—455.
4. **Arbuzov B. A.**//Phys. Lett. 1983. Vol. 125B. P. 497—500.
5. **Ефимов Г. В.** Препринт ОИЯИ P2-84-716. Дубна, 1984.
6. **Korchemsky G. P., Radyushkin A. V.**//Phys. Lett. 1986. Vol. 171B. P. 459—467; **Иванов С. В., Корчемский Г. П., Радюшкин А. В.**//ЯФ. 1986. Т. 44. С. 230—240.
7. **Арбузов Б. А.**//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 5—50.
8. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
9. **Куликов А. В.**//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 453—461.
10. **Politzer H. D.**//Nucl. Phys. 1976. Vol. B117. P. 397—404; Narison S.// Phys. Repts. 1982. Vol. 31. P. 263.
11. **Kanaya K., Sugawara H., Pakvasa S., Tuan S. F.**//Phys. Lett. 1982. Vol. 116B. P. 61—65; **Kanaya K.**//Phys. Rev. 1982. Vol. D26. P. 1758—1766.
12. **'t Hooft G.**//Nucl. Phys. 1974. Vol. B72. P. 461; 1974. Vol. B75. P. 461—473.
13. **Callan C. G., Coote N., Cross D. J.**//Phys. Rev. 1976. Vol. D13. P. 1649—1669.
14. **Wu T. T.**//Phys. Lett. 1977. Vol. 71B. P. 142—144.
15. **Einhorn M. B.**//Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 3451—3471.
16. **Coleman S. I.**//Ettore Majorana Int. School of Subnuclear Physics Erice, 1979.
17. **Faddeev L. D., Popov V. N.**//Phys. Lett. 1967. Vol. B25. P. 30—31; **De Witt B. S.**//Phys. Rev. 1967. Vol. 162. P. 1113—1120.
18. **Lim S. C.**//Phys. Lett. 1984. Vol. B149. P. 201—205; **Cheng H., Tsai E. C.**// Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 57. P. 511—514; **Yamagiahi P.**//Phys. Lett. 1987. Vol. B189. P. 161—163; **Lim S. C.**//Phys. Rev. 1988. Vol. D37. P. 3765—3782.
19. **Ivanov S. V.**//Phys. Lett. 1987. Vol B197. P. 539—543; Yad. Fiz. 1988. Vol. 48. P. 1392—1401.
20. **Caracciolo S., Curci C., Menotti P.**//Phys. Lett. 1982. Vol. 113B. P. 311—316.
21. **Landshoff P. V.**//Phys. Lett. 1986. Vol. B169. P. 69—73; **Steiner F.**//Phys. Lett. 1986. Vol. B173. P. 321—326; **Славнов А. А., Фролов С. А.**//ТМФ. 1986. Т. 58. С. 360—367.
22. **Фаддеев Л. Д.**//ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3—18.

23. **Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.** Введение в теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1976; **Sundermeyer K.** Constrained Dynamics Lecture Notes in Physics. Vol. 169. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
24. **Dirak P.A.M.**//Canad. J. Phys. 1955. Vol. 33. P. 650—656.
25. **Fock V. A.**//Sov. Phys. 1937. Vol. 12. P. 404—408.
26. **De Witt B. S.**//Phys. Rev. 1962. Vol. 125. P. 2189—2191.
27. **Mandelstam S.**//Ann. Phys. 1962. Vol. 19. P. 1—24; Phys. Rev. 1968. Vol. 175. P. 1580—1603.
28. **Steinmann O.**//Ann. Phys. 1984. Vol. 157. P. 232—254; Helv. Phys. Acta. 1985. Vol. 58. P. 995—1003.
29. **d'Emilio E., Mintchev M.**//Phys. Rev. 1983. Vol. D27. P. 1840—1851; Nuovo cimento. 1982. Vol. 69A. P. 43—61.
30. **Минчев М. Х., Тодоров И. Т.**//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 59—100.
31. **Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.**//JINR Rapid Communications 1985. N 8—85. P. 42—46; 1985. N 9—85. P. 39—42; Preprint JINR E2-85-430. Dubna, 1985.
32. **Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.**//Z. Phys. C. Part and Fields. 1985. Vol. 29. P. 631—635.
33. **Скачков Н. Б., Соловцов И. Л., Шевченко О. Ю.**//ТМФ. 1987. Т. 71. С. 54—66.
34. **Швингер Ю.** Частицы, источники, поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 2.
35. **Cronström C.**//Phys. Lett. 1980. Vol. 90B. P. 267—269; **Dubovikov M. S., Smilga A. V.**//Nucl. Phys. 1981. Vol. B185. P. 109—121.
36. **Соловцов И. Л.**//Изв. вузов. Сер. физика. 1985. № 1. С. 65—70.
37. **Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.**//JINR Rapid Communications. 1985. N 10—85. P. 13—18.
38. **Логунов А. А.**//ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 871—874.
39. **Stefanis N. G.**//Nuovo cimento. 1984. Vol. 83A. P. 205—209; Preprint HD — THEP-83-27. Heidelberg, 1983.
40. **Соловцов И. Л.**//Изв. АН БССР. 1985. № 5. С. 99—104.
41. **Сисакян А. Н., Скачков Н. Б., Соловцов И. Л., Шевченко О. Ю.**//ТМФ. 1989. Т. 78. С. 258—266; JINR Rapid Communications. 1987. N 3. P. 12—16.
42. **Барбашов Б. М.**//ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 607—621; **Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М.**//УФН. 1968. Т. 106. С. 593—616.
43. **Капшай В. Н., Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.**//Тр. VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино: ИФВЭ, 1983. Т. 2. С. 262—267; Preprint JINR E2-83-26. Dubna, 1983. P. 14.
44. **Бьёркен Д., Дрелл С.** Релятивистская квантовая теория: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
45. **Васильев А. Н., Письмак Ю. М.**//Вестник ЛГУ. 1975. № 10. С. 7—13; 1975. № 16. С. 7—12.
46. **Сисакян А. Н., Скачков Н. Б., Шевченко О. Ю.**//Препринты ОИЯИ Р2-87-728. Дубна, 1987; Р2-87-729. Дубна, 1987.
47. **Konetschny W., Kummer W.**//Nucl. Phys. 1976. Vol. B108. P. 367—370.