Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

П. Е. ДЮБЮК

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУППАХ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 19 V 1939)

В настоящей заметке усиливаются и обобщаются результаты, полученные автором в работах ([1],[2]). Применяя обозначения, которые уже были использованы в упомянутых статьях, формулируем следующие теоремы о нормализаторе элемента в конечной группе.

Теорема 1. *Пусть A — элемент порядка p^k некоторой группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — подгруппа индекса φ квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i}. Если φ не делится на p^{i+1} и каждый элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа $(k-1)$-го квазинормализатора элемента A порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Если каждый элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{k-1}}$ и A не делится на p^k.*

Теорема 3. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Если каждый элемент квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i}, сопряженный с A^{p^i}, имеет вид A^{mp^i}, причем $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Теорема 4. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа $(k-1)$-го квазинормализатора элемента A. Если каждый элемент P группы $\mathfrak{P}$, удовлетворяющий условию $P^p \subset \{A\}$ и сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{k-1}}$ и A не делится на $p^{k-\lambda_0+1}$.*

Теорема 5. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа нормализатора циклической группы $\{A\}$. Если каждый элемент группы $\mathfrak{P}$, удовлетворяющий условию $P^p \subset \{A\}$ и сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов групп $\{A^{p^{k-1}}\}$ и $\{A\}$ сравнимо с единицей по модулю p.*

При доказательстве теорем 1—3 применяются методы, уже использованные автором в упоминавшихся выше работах, причем ряд дополнительных замечаний позволяет несколько сократить промежуточные выкладки. Вывод теорем 4—5 требует также применения некоторых новых приемов.

Из теоремы 5 вытекает, что символ λ_i сохраняет смысл и для $p=2$, если только $\mathfrak{N}_A^{(1)}=\mathfrak{N}_A^{(2)}$. При соблюдении условий этой теоремы будут иметь место равенства

$$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{k-\lambda_0}$$

и далее

$$\lambda_{k-\lambda_0+1}=\lambda_0-1\ldots,\ \lambda_{k-2}=2,\ \lambda_{k-1}=1.$$

Далее очевидным образом обобщается одна теорема, доказанная в работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка «Об одном признаке непростоты группы» (3). Именно, оказывается возможным, сохранив доказательство теоремы, формулировать ее в следующем, более общем виде:

Теорема 6. *Пусть A—элемент порядка n подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, причем всякий элемент $\mathfrak{H}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A. Пусть $n=\prod_{i=1}^{k} p_i$, где все p_i—простые числа и $\mathfrak{N}$—наименьшее кратное нормализаторов циклических групп $\left\{A^{\frac{n}{p_i}}\right\}$. Если $\mathfrak{H}$ есть подгруппа $\mathfrak{N}$ и Π ($\mathfrak{N}$, A) не входит в коммутант $\mathfrak{H}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с порядком группы $\mathfrak{H}$.*

Символ Π ($\mathfrak{N}$, A) применяется в том же смысле, что и в цитированной работе (3).

Применяя теорему 2, а также некоторые предложения, приведенные в упоминавшейся раньше работе (2), можно обосновать такой критерий непростоты группы.

Теорема 7. *Пусть A—элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p—нечетное, простое число). Пусть $\mathfrak{P}$—силовская p-подгруппа ($k-1$)-го квазинормализатора элемента A. Если каждый элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m\equiv 1 \pmod p$, и элемент $A^{p^{k-1}}$ не принадлежит коммутанту силовской p-подгруппы нормализатора элемента A, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.*

Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.

Теорема 7 будет справедлива и для случая $p=2$, если только в условие включить дополнительное требование несопряженности элемента $A^{2^{k-2}}$ со своим обратным элементом.

Далее, применяя теорему 6, теорему 5 и лемму, доказанную в работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка (4), можно получить такой результат:

Теорема 8. *Пусть A—элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p—нечетное простое число). Пусть $\mathfrak{P}$—силовская p-подгруппа нормализатора циклической группы $\{A\}$. Если каждый элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m\equiv 1 \pmod p$ и A не входит в коммутант $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель,*

Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.

Теорема 8 справедлива и для случая $p=2$, если только $\mathfrak{N}_A^{(1)}=\mathfrak{N}_A^{(2)}$. Следствием предыдущих результатов является такая теорема:

Теорема 9. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа нормализатора элемента A. Если никакая степень A не сопряжена ни с одним из элементов $\mathfrak{P}$ и A не входит к коммутант $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.*

Теорема 9 является обобщением известной теоремы W. Burnside'a, а также теорем В. К. Туркина (6) и автора (2).

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
27 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, XXII, № 3 (1939). [2] ДАН, XXIII, № 1 (1939). [3] ДАН, XXI, № 4 (1938). [4] ДАН, XX, №7—8 (1938). [5] Theory of Groups of Finite Order, p. 327; О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, 168 (1933). [6] Math. Annalen, 111 (1935).