Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 V 1939)

1. Пусть D есть область, ограниченная замкнутой гладкой поверхностью S пространства трех измерений (x, y, z). Обозначим через $G(P, Q)$ функцию Грина для области D с полюсом в точке Q. В ряде вопросов теории потенциала играет существенную роль следующая оценка для функции G:

$$G(P, Q) < \frac{A\sigma \cdot s}{\overline{PQ}^3}, \tag{1}$$

где A — константа, зависящая только от вида области D, а σ и s — соответственно расстояния точек P, Q до поверхности S.

Для случая, когда D есть сфера, оценка (1) получается непосредственно из выражения для G. Rosenblatt показал, что (1) имеет место также, когда S обладает ограниченной кривизной [1]. Мы имеем в виду показать, что (1) имеет место, когда S есть произвольная поверхность Ляпунова *.

2. Доказательство базируется на одном вспомогательном построении. Фиксируем два положительных числа $\rho < \frac{1}{2}$, $\alpha < 1$ и обозначим через $P_k(t)$ решение уравнения Лежандра порядка k, регулярное и равное единице при $t = 1$. Пусть далее $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а θ — угол составляемый радиусом-вектором точки (x, y, z) с осью z. Обозначим через $T(\alpha, \rho)$ тело, содержащее точки положительной части оси z и ограниченное поверхностями

$$r\cos\theta - r^{1+\alpha} P_{1+\alpha}(\cos\theta) = 0. \tag{2}$$

$$r = \rho. \tag{3}$$

Часть поверхности (2), принадлежащей к границе T, мы назовем боковой поверхностью T.

Заметим, что в окрестности начала поверхность (2) имеет вид

$$z = -|P_{1+\alpha}(0)|(1+\varepsilon)(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

где ε стремится к нулю, когда точка (x, y) стремится к началу.

* Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если, каковы бы ни были две точки M_1 и M_2 поверхности, угол ψ между нормалями к S в M_1 и M_2 удовлетворяет неравенству $\psi < K(\overline{M_1M_2})^\nu$, где K и ν, $0 < \nu < 1$,—заданные константы.

Построим внутри T гармоническую функцию

$$W_{\alpha,\rho}(r, \theta) = \frac{A}{\rho}\left(r\cos\theta - r^{1+\alpha} P_{1+\alpha}(\cos\theta)\right) - \frac{B}{\rho^2} r^2 P_2(\cos\theta). \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что можно выбрать числа $\rho_0 < \frac{1}{2}$, A и B так, чтобы при $\rho < \rho_0$ функция $W_{\alpha,\rho}$ удовлетворяла неравенствам: на боковой поверхности T

$$W_{\alpha,\rho} \geqslant 0,$$

а на остальной части границы T

$$W_{\alpha,\rho} \geqslant 1.$$

Отметим кроме того, что в теле T на оси z имеем

$$W < (A+B)\frac{r}{\rho}. \tag{5}$$

3. Пусть D — область, ограниченная поверхностью Ляпунова S с показателем ν. Обозначим через $T(\alpha, \rho, M)$ тело, конгруэнтное $T(\alpha, \rho)$, имеющее вершину в точке M поверхности S и внутреннюю нормаль в точке M, совпадающую с внутренней нормалью к S. Полагая $\alpha < \nu$, мы можем выбрать число ρ_1, не зависящее от M так, чтобы боковая поверхность тела $T(\alpha, \rho_1, M)$ лежала вне D.

Рассмотрим функцию Грина $G(P, Q)$. Очевидно, что

$$G(P, Q) < \frac{1}{\overline{PQ}}. \tag{6}$$

Докажем, что

$$G(P, Q) < A_1 \frac{\sigma}{\overline{PQ}^2}, \tag{7}$$

где A_1 — константа, зависящая только от вида области D.

Пусть d — диаметр D; доказательство (7) очевидно достаточно провести для случая $\sigma < \frac{\rho_1}{4d}\overline{PQ}$. Пусть M—точка S, ближайшая к P_0, и $\rho = \frac{\rho_1}{2d} \cdot \overline{P_0Q}$. Рассмотрим тело $T(\alpha, \rho, M)$ и соответствующую функцию $W_{\alpha,\rho,M}$. Имея в виду, что $G(P, Q) = 0$ на поверхности S, а в точках сферы $\overrightarrow{MP} = \rho$, в силу (6) и выбора ρ,

$$G(P, Q) < \frac{4d}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\overline{P_0Q}},$$

заключаем на основании принципа максимума, что в точках области D, принадлежащих телу $T(\alpha, \rho, M)$,

$$G(P, Q) < \frac{4d}{\rho_1} \cdot \frac{W_{\alpha,\rho,M}}{\overline{P_0Q}},$$

и на основании (5) в точке P_0, лежащей на оси тела $T(\alpha, \rho, M)$,

$$G(P_0, Q) < \frac{4d(A+B)}{\rho_1} \cdot \frac{\sigma}{\rho \cdot \overline{P_0Q}} = \frac{16d^2(A+B)}{\rho_1^2} \cdot \frac{\sigma}{\overline{P_0Q}^2},$$

что доказывает неравенство (7). Исходя из (7) и рассматривая $G(P, Q)$, как функцию Q, при помощи тех же самых рассуждений докажем, что

$$G(P, Q) < \frac{1024 d^5 (A+B)^2}{\rho_1^5} \cdot \frac{S \cdot \sigma}{\overline{PQ}^3}. \tag{8}$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
27 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Rosenblatt, C. R., **201** (1935).