Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Г. КУРОШ

ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 19 V 1939)

Группа G называется локально свободной, если всякое конечное подмножество из G порождает в этой группе свободную подгруппу. К этому классу групп принадлежат в частности свободные группы любой мощности (1) и аддитивная группа рациональных чисел и ее подгруппы; сюда же принадлежит группа T, построенная в работе (2).

Всякая подгруппа локально свободной группы сама локально свободна. Все элементы локально свободной группы, кроме 1, имеют бесконечный порядок. Объединение возрастающей последовательности локально свободных групп само локально свободно. Для случая счетных групп последний результат допускает следующее обращение:

Всякая счетная локально свободная группа является объединением возрастающей последовательности свободных групп с конечным числом образующих.

Вопрос о существовании несчетных локально свободных групп, не являющихся объединением некоторой возрастающей последовательности свободных групп, остается открытым.

Свободное произведение любого множества локально свободных групп само локально свободно.

Доказательство. Если $G=\prod_{\alpha}^{*}H_{\alpha}$ и если в G дана конечная система элементов M, то в каждом из множителей H_{α} собираем все элементы, входящие в слова, записывающие элементы из M. Таких элементов будет конечное число, т. е. они порождают в H_{α} свободную подгруппу H'_{α}. Произведение $\prod_{\alpha} H'_{\alpha}$ является свободной группой, поэтому свободна и ее подгруппа $\{M\}$.

Локально свободная группа G называется группой конечного ранга, а именно ранга n, если n есть наименьшее число с тем свойством, что всякое конечное подмножество из G содержится в свободной подгруппе с n свободными образующими. Всякая счетная локально свободная, но не свободная группа ранга n может быть получена, как объединение возрастающей последовательности свободных групп с n свободными образующими. Эта группа при $n>1$ может быть получена также как объединение возрастающей последовательности свободных групп с m образующими при любом $m>n$ и даже как объединение возрастающей последовательности свободных групп с неограниченно растущим числом свободных образующих.

Объединение возрастающей последовательности несчетных свободных групп не может быть группой конечного ранга.

Доказательство. Пусть несчетная локально свободная группа G имеет ранг n и является объединением возрастающей последовательности свободных групп $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots$. В G берем конечное подмножество M, которое не содержится в подгруппе с меньшим, чем n, числом образующих. Тогда существует такое k и такое несчетное подмножество P из G, что всякое множество, получающееся присоединением к M одного любого элемента из P, уже в группе S_k содержится в свободной группе с n образующими. Все элементы из M записываются через конечное число свободных образующих группы S_k, т. е. M содержится в счетном свободном множителе A группы S_k. В множестве P в виду его несчетности можно найти элемент b, лежащий вне подгруппы A. Множество M', состоящее из множества M и элемента b, содержится в подгруппе B с n образующими, $B \subset S_k$. По теореме о подгруппах свободного произведения ([3]) пересечение $B \cap A$ будет свободным множителем для B. Это пересечение содержит однако множество M и поэтому обладает не менее чем n свободными образующими, что противоречит тому, что B отлично от $B \cap A$.

Если локально свободная группа G ранга n гомоморфно (но не изоморфно) отображается на локально свободную группу $\overline{G}$, то ранг группы $\overline{G}$ конечен и меньше n.

Доказательство. Берем в $\overline{G}$ любое конечное множество $\overline{M}$, а в G конечное множество M, содержащее по одному прообразу для элементов из $\overline{M}$ и один отличный от 1 элемент, отображающийся в 1. Множество M содержится в подгруппе A с n свободными образующими. Эта подгруппа отображается на свободную подгруппу $\overline{A}$ из $\overline{G}$, содержащую $\overline{M}$. Отображение гомоморфное, поэтому по теореме Whitehead'а ([4]) число свободных образующих в $\overline{A}$ меньше n.

Отсюда следует обобщение одной теоремы Magnus'а ([5]) о свободных группах:

Локально свободная группа конечного ранга не может быть изоморфной своей истинной фактор-группе.

Ранг свободного произведения двух локально свободных групп конечного ранга равен сумме рангов сомножителей.

Доказательство. Пусть $G = A*B$, A — ранга r, B — ранга s. Берем конечное множество M из G. Его элементы записываются через конечное число элементов из A и B, т. е. можно найти такие свободные подгруппы $A' \subset A$, $B' \subset B$, соответственно с r и s образующими, в свободном произведении которых содержится M. Поэтому ранг группы G не больше $r+s$. С другой стороны, берем в подгруппе A конечное подмножество M_1, которое не содержится в свободной подгруппе с меньшим, чем r, числом свободных образующих; соответствующим образом в подгруппе B выбираем подмножество M_2. Всякая подгруппа C из G, содержащая M_1 и M_2, разлагается по ([3]) в свободное произведение, среди множителей которого содержатся и пересечения $C \cap A$ и $C \cap B$. Поэтому число свободных образующих в C не меньше $r+s$.

Для решения вопроса о существовании неразложимых в свободное произведение локально свободных групп, отличных от групп ранга 1, докажем сперва лемму:

Лемма. *Свободное произведение локально свободных групп не может совпадать с нормальным делителем, порожденным в этом произведении одним из его элементов.*

Доказательство. Пусть $G = A*B$ и пусть нормальный делитель, порожденный элементом c, совпадает с G. Понятно, что $c \not\subset A$. Берем $a \subset A$, $a \neq 1$. Элемент a будет произведением конечного числа элементов, сопряженных с c. Элементы из A и B, с помощью которых записываются все эти сопряженные с c и сам элемент c, порождают в A и B свободные подгруппы A' и B', причем уже в $A'*B'$ элемент a содержится в нормальном делителе, порожденном элементом c. Так как $c \not\subset A'$, то по теореме о свободе ([6]) наложение соотношения $c = 1$ должно оставлять подгруппу A' свободной, мы же получаем в ней $a = 1$. Доказано.

Если дана свободная группа S со свободными образующими a и b_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{M}$, то элементы a и $c_\alpha = b_\alpha^{-1} a b_\alpha$, $\alpha \subset \mathfrak{M}$, будут свободными образующими истинной подгруппы H. Мы устраиваем теперь возрастающую последовательность свободных групп, вложенных друг в друга так же, как H вложено в S: если это будет последовательность

$$S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots,$$

где S_k, $k = 1, 2, \ldots$, обладает свободными образующими a и $b_{k\alpha}$, $\alpha \subset \mathfrak{M}$, то полагаем

$$b_{k\alpha} = b_{k+1,\alpha}^{-1}\, a\, b_{k+1,\alpha}.$$

Объединение этой последовательности совпадает с нормальным делителем, порожденным в нем элементом a, и поэтому будет неразложимым в свободное произведение. Этим доказано существование неразложимых в свободное произведение локально свободных групп любой бесконечной мощности.

Для случая групп конечного ранга заметим дополнительно, что если мы обозначим через D_n группу, построенную указанным выше способом при конечном множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из n элементов, то группа D_1 имеет очевидно ранг 2, а ранг группы D_n не выше $n+1$. В действительности ранг группы D_n равен числу $n+1$, так как существует гомоморфное, но не изоморфное отображение группы D_n на группу D_{n-1}. *Существуют следовательно неразложимые в свободное произведение счетные локально свободные группы любого конечного ранга.*

Поступило
21 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Schreier, Hamb. Abhandl., **5**, 161—183 (1927). [2] А. Курош, Мат. сб. (н. с.), **2**, 995—1001 (1937). [3] A. Kurosch, Math. Ann., **109**, 647—660 (1934). [4] J. H. C. Whitehead, Ann. of Math., **37**, 782—800, § 4 (1936). [5] W. Magnus, Math. Ann., **111**, 259—280 (1935). [6] W. Magnus, J. für die reine und angew. Math., **163**, 141—165 (1930).