

УДК 539.375

О ЗАДАЧЕ ГЕРЦА С УЧЕТОМ ИЗНАШИВАНИЯ

Н. М. БОРОДАЧЕВ^а, Г. П. ТАРИКОВ^{б+}, В. В. КОМРАКОВ^б

Рассматривается задача о контакте двух упругих тел, находящихся в скользящем контакте, с учетом износа их поверхностей. Получено интегральное уравнение контактной задачи с учетом износа. Показано, что в случае эллиптической площадки контакта, можно получить решение этого уравнения, и дать оценку влияния износа на контактное давление и параметры области контакта.

Ключевые слова: контакт, скольжение, полупространство, поверхность, трение, износ.

Введение. При трении скольжения происходит разрушение поверхностных слоев, в результате чего изменяется геометрия контактирующих тел. Это, в свою очередь, приводит к перераспределению усилий на площадке контакта и к изменению формы и размеров области контакта. Исследование влияния изнашивания на геометрические параметры площадки контакта и распределение контактных давлений представляет известный интерес.

Контактные задачи теории упругости с учетом изнашивания рассматривались рядом авторов [1—4]. В работах [2, 3] приведена обширная библиография по данному вопросу. Подробное изложение современных теорий изнашивания содержится в работе [5].

Цель работы — решить задачу о контакте двух упругих тел с учетом их изнашивания для случая эллиптической площадки контакта.

Постановка задачи. Рассмотрим два упругих тела, ограниченных выпуклыми поверхностями S_1 и S_2 , соприкасающихся в т. O и находящихся в скользящем контакте (рис. 1). На площадке контакта кроме нормальных напряжений возникают и касательные усилия трения.

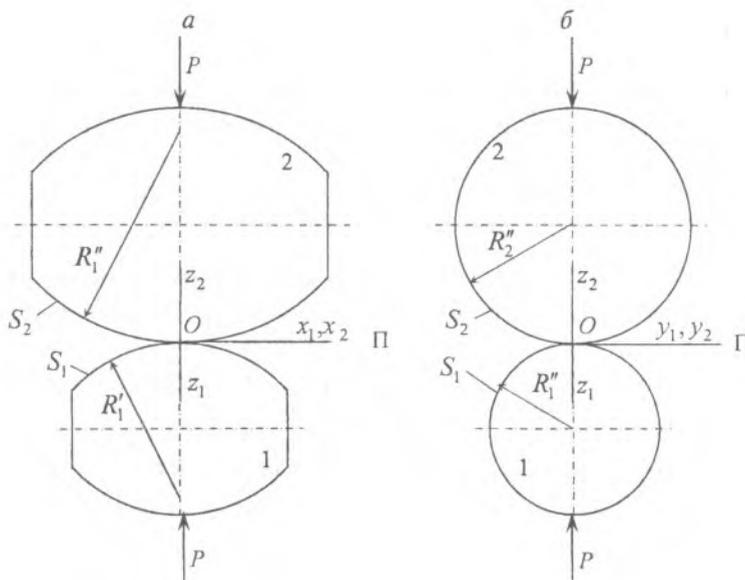


Рис. 1. Расчетная схема: a — кривизны поверхности в плоскости xOz ; b — тоже в плоскости yOz

^а Национальный авиационный университет. Украина, 252058, г. Киев, пр-т космонавта Комарова, 1.

^б Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого. Беларусь, 246746, г. Гомель, пр-т Октября, 48.

В работе [6] показано, что касательные усилия при трении скольжения мало влияют на форму и размеры области контакта, поэтому при решении контактной задачи с учетом изнашивания касательные усилия на площадке контакта учитывать не будем. Их будем учитывать при определении величины износа контактирующих поверхностей.

Приняв точку O за начало координат, проведем оси z_1 и z_2 , перпендикулярные к общей касательной плоскости Π , внутрь каждого из тел.

Условия контакта двух тел с учетом изнашивания можно представить в следующем виде [2, 4]:

$$u_z^{(1)} + u_{z^*}^{(1)} + u_z^{(2)} + u_{z^*}^{(2)} = \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y), \quad (1.1)$$

где $u_z^{(i)}$ — проекция вектора перемещения на ось z , $u_{z^*}^{(i)}$ — проекция вектора перемещения на ось z за счет износа, δ — сближение тел, φ_i — уравнение поверхности S_i ($i = 1, 2$).

При рассмотрении локальных эффектов в окрестности контакта, следуя Герцу, соприкасающиеся тела заменим упругими полупространствами прижатыми друг к другу по площадке Ω , расположенной в плоскости Π , на которой выполняются условия:

$$z_1 = z_2 = z = 0.$$

Площадка контакта Ω определяется областью внутри эллипса E_0 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, b — полуоси эллиптической площадки контакта.

Следовательно, с учетом ф-лы (1.1) имеем такие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} + u_{z^*}^{(1)} + u_z^{(2)} + u_{z^*}^{(2)} &= \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \sigma_z^{(i)} &= -p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \sigma_z^{(i)} &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \\ \tau_{xz}^{(i)} = \tau_{yz}^{(i)} &= 0, \quad -\infty < x, y < \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $i = 1, 2$; σ_z — нормальное напряжение, τ_{xz}, τ_{yz} — касательные напряжения, $p(x, y)$ — нормальное давление на площадке контакта.

Функция $p(x, y)$ заранее неизвестна и должна быть найдена в процессе решения контактной задачи.

Сведение контактной задачи с учетом износа к интегральному уравнению.

Известно, что для контактной задачи справедливо интегральное уравнение:

$$u_z^{(1)}(x, y) + u_z^{(2)}(x, y) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (2.1)$$

где $R = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2}$, $\vartheta_i = 1 - \nu_i/\mu_i$, ($i = 1, 2$), ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига.

На основании первого условия (1.2) и ф-лы (2.1) приходим к интегральному уравнению первого рода:

$$\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) - u_z^{(1)} - u_z^{(2)} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) — это интегральное уравнение контактной задачи с учетом износа.

Для определения функций $u_z^{(i)}$ ($i = 1, 2$) нужно выбрать закон изнашивания. Функции $u_z^{(i)}$ и давление p зависят не только от координат x, y , но и от времени t .

Наиболее часто используется следующая линейная зависимость для определения функций $u_z^{(i)}$:

$$u_z^{(i)}(x, y, t) = k^{(i)} \int_0^t p(x, y, \tau) v(x, y, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где v — скорость скольжения, $k^{(0)}$ — коэффициент изнашивания, который не зависит от времени и определяется экспериментально.

Для каждого момента времени, удовлетворяясь рассмотрением только локальных эффектов, будем считать, что поверхности соприкасающихся тел в области касания с плоскостью $z = 0$ аппроксимируются эллиптическими параболоидами. Тогда интегральное уравнение (2.2) примет следующий вид:

$$\left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.4)$$

Вопросы, связанные с определением величины R_1 и R_2 подробно рассматриваются в работе [7].

Внешне уравнение (2.4) не отличается от интегрального уравнения классической задачи Герца (без учета изнашивания). С учетом явления износа величины R_1 и R_2 и давление p следует считать зависящими от времени t .

Определение износа соприкасающихся поверхностей при трении скольжения. Как показывают точные измерения, зависимость износа пар трения во времени, носит вероятностный характер. В процессе работы пары трения различают три стадии:

1 — приработка, 2 — установившееся изнашивание, 3 — катастрофическое изнашивание.

В стадии установившегося изнашивания наблюдается постоянство силы трения и интенсивности изнашивания.

Износ может измеряться объемом ΔV изношенного материала, являющимся интегральной характеристикой изнашивания. Дифференциальной характеристикой является интенсивность изнашивания I_h :

$$I_h = \frac{\Delta V / \Delta t}{A_a (\Delta s / \Delta t)} = \frac{\Delta h / \Delta t}{\Delta s / \Delta t}, \quad (3.1)$$

где Δh — линейный износ, A_a — номинальная площадь контакта, $\Delta s / \Delta t = v$ — скорость скольжения.

В работе [5] приведены характерные величины I_h для некоторых деталей. Из формулы (3.1) следует:

$$\Delta h = I_h v \Delta t. \quad (3.2)$$

По формуле (3.2) можно определить линейный износ Δh за отрезок времени Δt . Для определения величины износа можно также использовать формулу (2.3).

В интегральное уравнение (2.4) входят величины R_1 и R_2 , которые изменяются с течением времени вследствие изнашивания. Покажем, как определяются эти величины в процессе изнашивания.

Ограничимся рассмотрением случая, когда контактирующие тела ограничены поверхностями вращения с параллельными осями при их внешнем соприкосновении (рис. 1). В этом случае [7] можно записать:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2}. \quad (3.3)$$

Радиусы кривизны поверхностей соприкасающихся тел R'_1 , R''_1 и R'_2 , R''_2 показаны на рисунке 1, а, б.

До начала изнашивания известны $R'_{1(0)}$, $R''_{1(0)}$, $R'_{2(0)}$, $R''_{2(0)}$. Применяя формулы (3.3), находим $R_{1(0)}$ и $R_{2(0)}$.

По времени задачу решаем дискретно. В момент времени t_1 определяем износ в точках 0–4 экспериментально (рис. 2) или теоретически по формулам (2.3) или (3.2). Затем наносим полученные данные на график (рис. 3) и по трем точкам находим новое значение R''_1 , а именно $R''_{1(1)}$. На рис. 3 изображены только результаты для радиуса R''_1 . Можно показать аналогичные результаты расчетов для радиусов: R'_1 , R'_2 , R''_2 . Таким образом, для момента времени t_1 находим значения радиусов: $R'_{1(1)}$, $R''_{1(1)}$, $R'_{2(1)}$, $R''_{2(1)}$. Подставляя эти значения в формулу (3.3) находим $R_{1(1)}$ и $R_{2(1)}$.

Следовательно, если в интегральное уравнение (2.4) подставить значения $R_{1(0)}$ и $R_{2(0)}$ и решить его, то найдем давление $p_{(0)}$ и размеры площадки контакта без учета изнашивания.

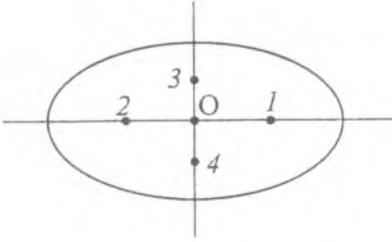


Рис. 2. Схема расположения исследуемых точек

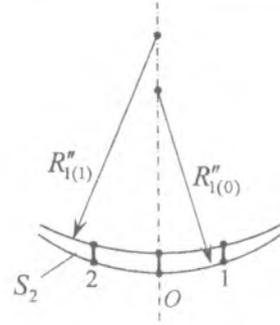


Рис. 3. Характер износа

Если же подставить в ур-ние (2.4) значения $R_{1(1)}$ и $R_{2(1)}$ и решить его, то можно найти новое распределение давления $p_{(1)}$ и новые размеры площадки контакта, которые будут соответствовать моменту времени t_1 , т.е. получим решение с учетом изнашивания.

Далее, таким же способом можно получить решение контактной задачи с учетом износа в моменты времени t_2, t_3, \dots, t_n .

Решение интегрального уравнения (2.4). Решение уравнения (2.4) получим, предполагая, что область контакта Ω ограничена эллипсом E_0 . Примем, что выполняются условия:

$$a \geq b, R_1 \geq R_2,$$

где $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $e^2 = 1 - b^2/a^2$, e — эксцентриситет эллипса E_0 .

Параметры (полуоси) a, b эллипса E_0 заранее неизвестны, поэтому их следует определить в процессе решения задачи.

Из теории потенциала следует, что решение $p(x, y)$ ур-ния (2.4) должно обращаться в нуль на контуре площадки контакта. Решение, удовлетворяющее этому требованию, имеет вид:

$$p(x, y) = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{4.1}$$

Постоянную C можно найти, используя условие равновесия:

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy, \tag{4.2}$$

где P — нормальная сила, прижимающая контактирующие тела, подставляя решение (4.1) в условие (4.2):

$$C = \frac{3}{2} p_c, \quad p_c = \frac{P}{\pi a b} = \frac{P}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}. \tag{4.3}$$

Таким образом имеем:

$$p(x, y) = \frac{3}{2} p_c \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) определяет закон распределения нормального давления на площадке контакта.

Чтобы определить полуось a и эксцентриситет e эллипса E_0 подставим ф-лу (4.4) в ур-ние (2.4). В результате получим:

$$2\pi \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) = \frac{3}{2} p_c (\vartheta_1 + \vartheta_2) (I_0 - I_1 x^2 - I_2 y^2), \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &= \pi b K(e), \\ I_1 &= \frac{\pi b}{e^2 a^2} [K(e) - E(e)], \\ I_2 &= \frac{\pi b}{e^2 a^2} \left[\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

здесь $K(e)$, $E(e)$ — полные эллиптические интегралы.

Из соотношений (4.5) и (4.6), находим:

$$\delta = \frac{3}{4} p_c (\vartheta_1 + \vartheta_2) b K(e), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{3}{2} p_c (\vartheta_1 + \vartheta_2) \frac{b}{e^2 a^2} [K(e) - E(e)], \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{3}{2} p_c (\vartheta_1 + \vartheta_2) \frac{b}{e^2 a^2} \left[\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поделив первую ф-лу (4.8) на вторую, получим:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{K(e) - E(e)}{\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e)} = \frac{K(e) - E(e)}{\frac{1}{1-e^2} E(e) - K(e)}. \quad (4.9)$$

Из соотношения (4.9) можно определить эксцентриситет e эллипса E_0 , а из первой ф-лы (4.8) — полуось a эллипса E_0 :

$$a = \left\{ \frac{3}{2\pi} (\vartheta_1 + \vartheta_2) R_1 P \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)] \right\}^{1/3}. \quad (4.10)$$

Вторая полуось эллипса E_0 находится из соотношения:

$$b = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Ф-лу (4.10) перепишем в виде:

$$a = R_1^{1/3} \alpha, \quad \alpha = \left\{ \frac{3}{2\pi} (\vartheta_1 + \vartheta_2) P \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)] \right\}^{1/3}. \quad (4.11)$$

После определения $R_{1(1)}$ и $R_{2(1)}$ по ф-лам (3.3), как показано выше, для упрощения дальнейших вычислений примем, что:

$$\frac{R_{2(0)}}{R_{1(0)}} = \frac{R_{2(1)}}{R_{1(1)}}, \quad (4.12)$$

т. е. эксцентриситет e остается постоянным.

Пусть выполняются равенства:

$$\begin{aligned} R'_{1(1)} &= \gamma R'_{1(0)}, & R''_{1(1)} &= \gamma R''_{1(0)}, \\ R'_{2(1)} &= \gamma R'_{2(0)}, & R''_{2(1)} &= \gamma R''_{2(0)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

т. е. изменение радиусов тел в процессе износа происходит в одном и том же отношении.

Ф-лу (3.3) перепишем в следующем виде:

$$R_1 = \frac{R'_1 R''_1}{R'_1 + R''_1}, \quad R_2 = \frac{R'_2 R''_2}{R'_2 + R''_2}. \quad (4.14)$$

Подставляя равенство (4.13) в (4.14), получим:

$$R_{1(1)} = \gamma R_{1(0)}, \quad R_{2(1)} = \gamma R_{2(0)}, \quad (4.15)$$

т. е. условие (4.12) выполняется.

Коэффициент $\gamma \geq 1$, т. к. износ в центре площадки контакта больше, чем в других точках.

По формуле (4.11) можно определить полуось a эллипса E_0 до и после изнашивания. Имеем:

$$a_0 = R_{1(0)}^{1/3} \alpha; \quad a_1 = R_{1(1)}^{1/3} \alpha. \quad (4.16)$$

Здесь a_0, a_1 — значение полуоси a до изнашивания и с его учетом соответственно.

Следовательно можно записать:

$$\frac{a_1}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{R_{1(1)}}{R_{1(0)}}} = \sqrt[3]{\gamma}. \quad (4.17)$$

Здесь учтены соотношения (4.12), (4.15), (4.16).

По ф-ле (4.17) можно построить график зависимости a_1/a_0 от величины γ (рис. 4). Тогда имеем:

$$a_1 = \gamma^{1/3} a_0. \quad (4.18)$$

Из выражения (4.4) следует:

$$P_{\max} = \frac{3}{2} P_c = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}, \quad (4.19)$$

Используя это выражение находим отношение:

$$\frac{P_{\max(1)}}{P_{\max(0)}} = \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^2 = \gamma^{-2/3}, \quad (4.20)$$

где $P_{\max(0)}, P_{\max(1)}$ — максимальное давление в центре площадки контакта без учета изнашивания и с учетом соответственно.

На рис. 4 показана зависимость величины $P_{\max(0)}/P_{\max(1)}$ от коэффициента γ , полученная по ф-ле (4.20).

Приведенные выше расчеты относятся к случаю, когда выполняется соотношение (4.12), т. е. когда в процессе изнашивания эксцентриситет граничного контура остается постоянным. Можно отказаться от этого условия, но тогда все расчеты следует выполнять в числах, т. е. все радиусы контактирующих тел (до и после изнашивания) нужно задавать численно.

Выводы и рекомендации. Предлагаемый метод решения рассмотренной задачи позволяет оценить влияние изнашивания на величину контактного давления и размеры эллиптической области контакта. Он может быть использован для решения различных практических инженерных задач.

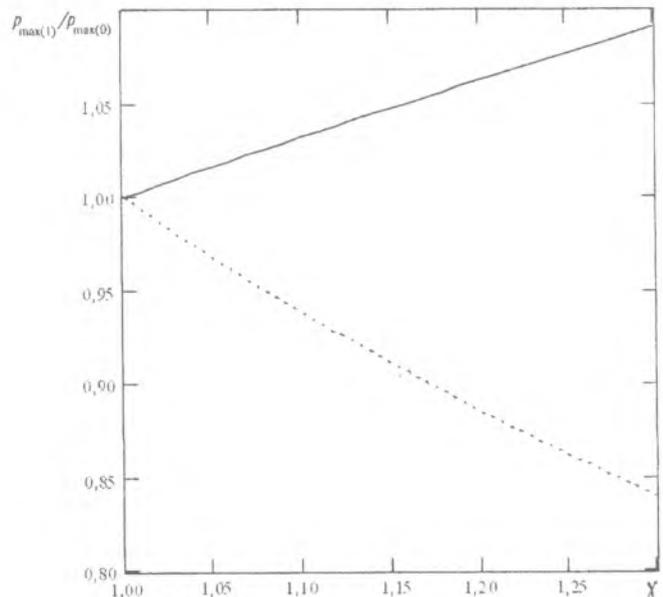


Рис. 4. Зависимость величины $P_{\max(1)}/P_{\max(0)}$ от коэффициента γ

Обозначения

$u_z^{(i)}$ — проекция вектора перемещения на ось z ; $u_{z^*}^{(i)}$ — проекция вектора перемещения на ось z за счет износа; δ — сближение тел; $\varphi(x, y)$ — уравнение поверхности; σ_z — нормальное напряжение; τ_{xz} , τ_{yz} — касательные напряжения; $p(x, y)$ — нормальное давление на площадке контакта; ν — коэффициент Пуассона; μ — модуль сдвига; v — скорость скольжения; k — коэффициент изнашивания; Δh — линейный износ; A_a — номинальная площадь контакта; e — эксцентриситет эллипса; P — нормальная сила.

Литература

1. Александров В. М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // ДАН СССР. — 1983 (271), № 4, 827—831
2. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. — М.: Машиностроение. — 1988
3. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології. — Київ: ІЗМН. — 1996
4. Тариков Г. П. Электрическое моделирование пространственных контактных задач. — Гомель: ГГТУ. — 2001
5. Польцер Г., Майсснер Ф. Основы трения и изнашивания. — М.: Машиностроение. — 1984
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир. — 1989
7. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука. — 1970

Поступила в редакцию 21.05.03.

Borodachev N.M., Tarikov G.P., and Komrakov V.V. A Hertzian problem with the allowance for wear.

A problem is treated of two elastic bodies in sliding contact with the allowance for wear of their surfaces. An integral solution of the contact problem is derived with an allowance for wear. It is shown that if the contact spot is elliptic it is possible to obtain a solution of the equation and assess the effect of wear on contact pressure and parameters of the contact region.