Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

ФИЗИКА

М. А. ИСАКОВИЧ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЖИДКОСТИ, ОБЛАДАЮЩЕЙ МАКСВЕЛЛОВОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 21 IV 1939)

В своей работе «On the Dynamical Theorie of Gases» Максвелл рассматривает между прочим сплошную среду, для которой внутреннее напряжение при сдвиге S связано с величиной деформации сдвига e уравнением:

$$\dot{S} = a\dot{e} - \frac{S}{\tau}. \qquad (1)$$

Здесь a и τ—физические константы среды: a—модуль упругости, τ—время релаксации. Точка обозначает субстанциальное дифференцирование по времени.

Если движение среды таково, что тензор скоростей деформации не остается постоянным для каждой частицы, то возникающие напряжения не находятся в линейной зависимости от скоростей деформации, и поведение самой среды зависит от степени нестационарности движения. Подобную среду будем называть релаксирующей жидкостью или жидкостью, обладающей максвелловой вязкостью.

Будем считать нестационарность большой, если изменение напряжения за время релаксации велико по сравнению с величиной напряжения, и малой—в обратном случае. В первом случае, пренебрегая в уравнении (1) величиной $\frac{S}{\tau}$ по сравнению с $\dot{S}$, придем к закону Гука для упругого тела с модулем упругости a. Во втором случае, пренебрегая величиной $\dot{S}$ по сравнению с $\frac{S}{\tau}$, придем к уравнению жидкостного трения. Таким образом для релаксирующей жидкости понятие ньютоновой вязкости вообще не применимо; при достаточно малой нестационарности поведение такой жидкости практически совпадает с поведением обычной вязкой жидкости с коэффициентом вязкости $\mu = \frac{1}{2}a\tau$; в предельном случае большой нестационарности напряжения удовлетворяют закону Гука.

Вещества типа вара или сургуча по крайней мере качественно ведут себя согласно уравнению (1).

Некоторые вопросы, относящиеся к гидродинамике релаксирующей жидкости, были мною разобраны в работе: «О гидродинамике жидкости, обладающей максвелловой вязкостью».

Особый интерес представляет распространение звуковых волн в релаксирующей жидкости. В последнее время привлекают внимание вопросы распространения ультразвука как в газах, так и в жидкостях; сюда относится ряд экспериментальных работ. Объяснение некоторых явлений, наблюдавшихся при распространении ультразвука, не может быть повидимому дано на основании уравнений Навье-Стокса, даже если допустить, что второй коэффициент вязкости отличен от нуля. Можно высказать предположение, что явление вязкости есть вообще релаксационное явление, соответствующее максвелловой схеме. Такое предположение относительно второго коэффициента вязкости (объемная релаксация) было высказано Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем в работе: «К теории поглощения звука в жидкостях» ([2]), где произведены и соответственные расчеты. Вводя аналогичное предположение относительно первого коэффициента вязкости, можно допустить, что и обычная вязкость объясняется явлением релаксации напряжений сдвига и что особенно для сильно-вязких жидкостей влияние релаксации начинает существенно сказываться на ходе явления при ультраакустических частотах. В связи с этим в настоящей заметке, по предложению ак. Мандельштама, рассмотрена задача о распространении волн сжатия в жидкости, обладающей не только объемной релаксацией, но и релаксацией сдвига.

Заметим, что распространение звуковых колебаний в среде, обладающей релаксационными свойствами, уже изучалось теоретически A. Gemant. Однако как основные предпосылки его теории, так и результаты исследования существенно отличаются от приводимых ниже.

Обобщим уравнение Максвелла (1) на случай любой деформации частицы жидкости, предполагая наличие как релаксации сдвига, так и объемной релаксации.

Допустим, что состояние жидкости в каждый момент вполне определяется ее плотностью ρ и разностью $e_{ik}-\xi_{ik}$ двух тензоров e_{ik} и ξ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Тензор e_{ik} определим, как тензор, удовлетворяющий в Декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнению

$$\dot{e}_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{2}$$

где u_i—компонента скорости по оси x_i. Таким образом $\dot{e}_{ik}$ есть тензор скоростей деформации, а для малых деформаций (например для малых колебаний) e_{ik} есть тензор деформации. Тензор ξ_{ik} определим, как тензор, удовлетворяющий так называемому уравнению реакции

$$\dot{\xi}_{ik}=\frac{1}{\tau_1}(e_{ik}-\xi_{ik})+\delta_{ik}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)(e_{\alpha\alpha}-\xi_{\alpha\alpha}). \tag{3}$$

Здесь τ_1—время релаксации напряжений сдвига, а τ_2—время объемной релаксации.

Компоненты тензора ξ_{ik} характеризуют в известном смысле внутреннее состояние жидкости. Мы не приписываем им никакого наглядного механического значения. Они были введены в гидродинамические уравнения повидимому впервые Л. Натансоном в работе: «On the Laws of Viscosity» ([4]). В упомянутой работе по объемной релаксации применены подобные же параметры.

Принимая линейность зависимости между тензором напряжений в жидкости S_{ik} и тензором $e_{ik}-\xi_{ik}$, получим для общего случая наличия объемной релаксации и релаксации сдвига в силу симметричности S_{ik}:

$$S_{ik}=-\delta_{ik}p+a(e_{ik}-\xi_{ik})+\delta_{ik}\frac{1}{3}(\varkappa-a)(e_{\alpha\alpha}-\xi_{\alpha\alpha}). \tag{4}$$

Здесь p—гидростатическое давление, a—модуль упругости сдвига, $\varkappa$—модуль объемной упругости; для интересующих нас вопросов $\varkappa$—адиабатический модуль. Величины $\mu=\frac{1}{2}a\tau_1$ и $\mu'=\frac{1}{3}\varkappa\tau_2$ $\left(\nu=\frac{1}{2}\frac{a\tau_1}{\rho}\right.$ и $\nu'=$

$=\frac{1}{3}\frac{\varkappa\tau_2}{\rho}\Big)$ соответствуют первому и второму динамическим (кинематическим) коэффициентам вязкости.

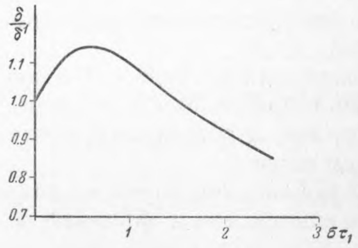
Исключая для случая чистого сдвига параметр ξ_{ik} из уравнений (3) и (4), вернемся к уравнению Максвелла (1).

Пусть на жидкость действует массовая сила F_i; тогда, рассматривая силы, действующие на элемент жидкости, и учитывая (4), найдем:

$$\rho\dot{u}_i = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + a\frac{\partial}{\partial x_k}(e_{ik} - \xi_{ik}) + \frac{1}{3}(\varkappa - a)\frac{\partial}{\partial x_i}(e_{\alpha\alpha} - \xi_{\alpha\alpha}). \qquad (5)$$

Уравнения (5), (2) и (3) представляют собой систему гидродинамических уравнений движения жидкости, обладающей максвелловой вязкостью.

R. Reiger'ом (5) было рассмотрено распространение поперечных колебаний в релаксирующей жидкости. Результаты его рассмотрения получаются из вышеприведенных гидродинамических уравнений. Следует подчеркнуть, как характерное обстоятельство, что для достаточно больших частот в жидкости, обладающей максвелловой вязкостью, возможны в противоположность случаю обычной вязкости типичные малозатухающие поперечные колебания.



Если поперечные колебания жидкости вызваны происходящими под действием упругих сил колебаниями в своей плоскости пластинки, соприкасающейся с поверхностью жидкости, то, как нетрудно получить из основных уравнений, коэффициент затухания колебаний пластинки равен:

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{\frac{\sigma\nu}{2}}\,\frac{\sqrt{\sigma\tau_1 + \sqrt{\sigma^2\tau_1^2 + 1}}}{\sqrt{\sigma^2\tau_1^2 + 1}},$$

где ρ_0—поверхностная плотность пластинки и σ—циклическая частота колебаний. Соответственная величина δ' затухания в отсутствие релаксации равна $\delta' = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{\frac{\sigma\nu}{2}}$. Зависимость отношения $\frac{\delta}{\delta'}$ от частоты колебаний приведена на графике.

Рассмотрим теперь, ограничиваясь случаем малых колебаний, распространение плоской звуковой волны циклической частоты σ в направлении оси x_1. Скорости частиц жидкости направлены в этом случае параллельно оси x_1, и уравнение движения жидкости принимает вид:

$$\rho\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + a\frac{\partial}{\partial x_1}(e_{11} - \xi_{11}) + \frac{1}{3}(\varkappa - a)\frac{\partial}{\partial x_1}(e_{\alpha\alpha} - \xi_{\alpha\alpha}). \qquad (6)$$

Обозначая через c лапласову скорость звука при малых акустических частотах и через s—отношение приращения плотности к плотности невозмущенной жидкости, получим, как обычно, $p = p_0 + c^2\rho s$, где p_0—давление в невозмущенной жидкости. Сжатие s удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (7)$$

Исключая из уравнения движения, уравнения неразрывности и уравнения реакции величины ξ, p, s, получим, замечая, что $\dot{e}_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, уравнение продольных колебаний жидкости в виде

$$\tau_1\tau_2\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4}-\tau_1\tau_2\left(c^2+\frac{2}{3}\frac{a}{\rho}+\frac{1}{3}\frac{\varkappa}{\rho}\right)\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2\partial x_1^2}+$$

$$+(\tau_1+\tau_2)\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3}-\left[c^2(\tau_1+\tau_2+\frac{2}{3}\frac{a\tau_1}{\rho}+\frac{1}{3}\frac{\varkappa\tau_2}{\rho}\right]\frac{\partial^3 u_1}{\partial t\partial x_1^2}-c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0. \qquad (8)$$

Подставляя в уравнение (8) периодическое решение $u_1=e^{i\sigma t-mx}$, найдем комплексное волновое число m в виде

$$m=i\frac{\sigma}{c}\left(1+\frac{2}{3}\frac{a}{c^2\rho}\frac{\sigma^2\tau_1^2}{1+\sigma^2\tau_1^2}+\frac{1}{3}\frac{\varkappa}{c^2\rho}\frac{\sigma^2\tau_2^2}{1+\sigma^2\tau_2^2}+\right.$$

$$\left.+i\frac{2}{3}\frac{a}{c^2\rho}\frac{\sigma\tau_1}{1+\sigma^2\tau_1^2}+i\frac{\varkappa}{c^2\rho}\frac{\sigma\tau_2}{1+\sigma^2\tau_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Считая дисперсию и затухание малыми, получим:

$$m=i\frac{\sigma}{c_\sigma}+\alpha=i\frac{\sigma}{c\left(1+\frac{2}{3}\frac{\nu}{c^2}\frac{\sigma^2\tau_1}{1+\sigma^2\tau_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\nu'}{c^2}\frac{\sigma^2\tau_2}{1+\sigma^2\tau_2^2}\right)}+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\nu}{c^3}\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2\tau_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\nu'}{c^3}\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2\tau_2^2}.$$

Скорость распространения волн частоты σ равна:

$$c_\sigma=c\left(1+\frac{2}{3}\frac{\nu}{c^2}\frac{\sigma^2\tau_1}{1+\sigma^2\tau_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\nu'}{c^2}\frac{\sigma^2\tau_2}{1+\sigma^2\tau_2^2}\right).$$

Коэффициент затухания равен:

$$\alpha=\frac{2}{3}\frac{\nu}{c^3}\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2\tau_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\nu'}{c^3}\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2\tau_2^2}.$$

Из выражения для скорости следует, что в жидкости, обладающей максвелловой вязкостью, имеет место «релаксационная» дисперсия.

При $\sigma\tau_1\gg 1$ ($\sigma\tau_2\gg 1$) изменение скорости и коэффициент затухания, обусловленные релаксацией сдвига (объемной релаксацией), приобретают предельные значения (явление «насыщения»), а затухание на одной длине волны стремится к нулю при увеличении частоты. При малых частотах получаем обычный коэффициент затухания для вязкой жидкости с двумя коэффициентами вязкости ν и ν'. Предельные значения затухания, обусловленного релаксацией сдвига и объемной релаксацией, равны соответственно $\frac{1}{3}\frac{a}{\tau_1 c^3\rho}$ и $\frac{1}{6}\frac{\varkappa}{\tau_2 c^3\rho}$. Интересно отметить, что если уменьшать τ_1 или τ_2, оставляя a и $\varkappa$ без изменения, то коэффициенты вязкости μ и μ' будут уменьшаться, в то время как предельные значения для затухания будут увеличиваться. Заметим далее, что в отличие от полученных результатов значение коэффициента затухания для больших частот, получаемое из теории комплексной вязкости A. Gemant, пропорционально квадрату частоты, как и для случая обычной вязкости.

Можно ожидать, что для сильно вязких жидкостей влияние второго коэффициента вязкости при ультраакустических частотах относительно мало, а дисперсия и затухание, обусловленные релаксацией сдвига, уже отличаются от соответственных значений для обычной вязкой жидкости. Возможно что именно это явление имеет место в опытах Zachoval([6]), обнаружившего увеличение скорости звука в касторовом масле на величину порядка 1% при переходе от частоты $1.25 \cdot 10^7$ к частоте $3.75 \cdot 10^7$. В этом случае при данной частоте и фиксированном ν максимальное возможное значение скорости распространения в релаксирующей жидкости соответствует времени релаксации $\tau_1 = \frac{1}{\sigma}$ и равно $c\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\sigma\nu}{c^2}\right)$.

Заметим в заключение, что простая максвеллова схема не может претендовать на количественное объяснение всех явлений, встречающихся при распространении ультразвука. Можно однако полагать, что она в состоянии правильно объяснить ряд характерных явлений.

Поступило
22 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Phil. Trans., **157**, p. 49 (1867). [2] ЖЭТФ, **7**, вып. 3 (1937). [3] Physics, p. 363 (1935). [4] Phil. Mag., **2**, p. 342 (1901). [5] Ann. d. Physik, p. 51 (1910). [6] C. R., **208**, № 4, p. 265 (1939).