

В. Л. ГИНЗБУРГ

**К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. I**

(Представлено академиком В. А. Фоком 29 III 1939)

Оператор Гамильтона для нерелятивистского электрона и поля имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(r) \right)^2 + e\varphi(r) + \frac{1}{8\pi} \int [(\vec{E}^{tr})^2 + \vec{H}^2] dv, \quad (1)$$

где  $\vec{A}(r)$  — трансверсальный векторный потенциал в месте нахождения электрона. При этом  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ;  $\vec{E}^{tr} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ;  $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

Обычно в предположении, что нет внешнего магнитного поля, все члены (1), в которые входит  $\vec{A}$ , трактуются как энергия световых квантов или энергия взаимодействия электрона со световыми квантами.

Подобная интерпретация не находится однако в соответствии с классической электродинамикой, как этого следовало бы ожидать. Действительно поле движущихся зарядов, даже если никакого излучения нет, не может быть описано одними продольным векторным и скалярным потенциалами, так как в частности магнитное поле, сопровождающее движущиеся заряды, целиком относится к поперечному векторному потенциалу. Таким образом в классической теории поперечное поле содержит как световую часть, так и увлекаемую зарядами, принципиально от света отличную часть. Та же ситуация имеет место и в квантовой электродинамике, поскольку разделение векторного потенциала на продольную и поперечную часть релятивистски неинвариантно, и если например энергия поперечного поля в одной системе координат равна нулю, в другой она нулю не равна. Световое же поле, как известно, выбором системы координат создано быть не может. Мы должны поэтому признать ошибочным мнение, согласно которому в квантовой теории световое поле есть целиком поле света.

Высказанные соображения позволяют понять природу излучения равномерно движущимся электроном электромагнитной энергии, казавшегося специфическим для квантовой электродинамики.

В. А. Фоком (1) было подчеркнуто, что волновое уравнение квантовой электродинамики с гамильтоновским оператором (1) или соответствующим релятивистским не имеет стационарного решения, отвечающего равномерно движущемуся электрону при отсутствии световых квантов в поле, откуда и вытекает, что равномерно движущийся электрон должен излучать.

А. Смирнов<sup>(2)</sup> вычислил это излучение в нерелятивистском случае, пользуясь волновыми функциями 1-го приближения теории возмущений Шредингера и пренебрегая реакцией излучения на электрон. При этом он получил следующие результаты.

При адиабатическом включении взаимодействия электрона с полем электрон излучает энергию, равную

$$H_{tr} = \frac{4\pi e^2}{m^2 c^2} \sum_{\lambda} \frac{(\vec{p} e_{\lambda})^2}{k_{\lambda}^2}. \quad (2)$$

При мгновенном включении взаимодействия вычисляется среднее по времени значение излученной энергии, равное энергии поля при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае имеем

$$\overline{H}_{tr}^{(\text{средн. по } t)} = H_{tr} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{8\pi e^2}{m^2 c^2} \sum_{\lambda} \frac{(\vec{p} e_{\lambda})^2}{k_{\lambda}^2}. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3)  $\vec{p}$  — импульс электрона,  $e_{\lambda}$  и  $\vec{k}_{\lambda}$  — единичный вектор поляризации и волновой вектор фотонов сорта  $\lambda$ . При этом в соответствующих формулах Смирнова мы перешли к обычным единицам от единиц Хевисайда, положили объем Nohlraum'a равным единице и заменили суммирование по всем направлениям  $\vec{k}_{\lambda}$  суммированием по половине направлений волнового вектора.

Излучение равномерно движущимся электроном электромагнитной энергии, указанное выше, объясняется характером выбранных начальных условий. Действительно, начальные условия, которыми пользуются в квантовой электродинамике и согласно которым при  $t=0$  имеется равномерно движущийся электрон и энергия поперечного поля равна нулю, означают, что при  $t=0$  движущийся заряд не окружен увлекаемыми им магнитным и поперечным электрическим полями. Такие начальные условия не могут отвечать стационарному состоянию и должны приводить к тому, что после включения взаимодействия электрон излучит по крайней мере свое увлекаемое поле.

Соответствующая задача может быть поставлена в классической теории, причем получаются все результаты Смирнова. Ниже это и сделано, некоторые же другие вопросы рассмотрены в другом сообщении.

Функция Гамильтона в классической электродинамике для нерелятивистского электрона и поля имеет форму (1), где уже конечно входящие величины не рассматриваются как операторы. Разлагая  $\vec{A}$  на плоские волны:

$$\vec{A}(\vec{x}_1, t) = \sum_{\lambda} (q_{\lambda_1} \vec{A}_{\lambda_1} + q_{\lambda_2} \vec{A}_{\lambda_2}), \quad (4)$$

где

$$\vec{A}_{\lambda_1} = e_{\lambda} \sqrt{8\pi c} \cos(\vec{k}_{\lambda} \vec{x})$$

и

$$\vec{A}_{\lambda_2} = e_{\lambda} \sqrt{8\pi c} \sin(\vec{k}_{\lambda} \vec{x}),$$

получаем для  $H_{tr}$  выражение:

$$H_{tr} = \frac{1}{8\pi} \int [(\vec{E}^{tr})^2 + \vec{H}^2] dv = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, i} (p_{\lambda i}^2 + v_{\lambda}^2 q_{\lambda i}^2), \quad (5)$$

где  $p_{\lambda i} = \dot{q}_{\lambda i}$ ,  $v_{\lambda} = c |\vec{k}_{\lambda}|$  и  $i = 1, 2$ . При этом в (4) и (5) суммирование ведется по половине направлений  $\vec{k}_{\lambda}$ .

Координаты поля  $q_{\lambda i}$  подчиняются следующей системе уравнений:

$$\ddot{q}_{\lambda i} + v_{\lambda}^2 q_{\lambda i} = \frac{e}{cm} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(r), \vec{A}_{\lambda i}(r) \right). \quad (6)$$

Функция (1) и вытекающие из нее уравнения движения учитывают одновременно как влияние поля на частицы, так и, наоборот, влияние частиц на поле. Решение этой общей задачи представляется невозможным. Поэтому, поскольку нас интересует в первую очередь влияние частиц на поле, т. е. излучение, мы сделаем предположения, эквивалентные пренебрежению реакцией излучения на электрон. Пренебрежение реакцией означает пренебрежение импульсом излучения и достигается тем, что в (1) мы положим  $\vec{k}_{\lambda} = 0$ . В этом случае при отсутствии внешних полей ( $\varphi(r) = 0$ ), импульс частицы  $\vec{p}$  сохраняется. Кроме того пренебрежем в (1) членом  $\frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2(r)$ , обуславливающим, как видно из (6), связь между осцилляторами поля.

Сделанные предположения, эквивалентные предположениям Смирнова, приводят к следующему виду гамильтоновской функции:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{e\sqrt{8\pi}}{m} \sum_{\lambda} (\vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda}) q_{\lambda_1} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, i} (p_{\lambda i}^2 + v_{\lambda}^2 q_{\lambda i}^2). \quad (7)$$

Уравнения (6) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda_1} + v_{\lambda}^2 q_{\lambda_1} &= \frac{e\sqrt{8\pi}}{m} (\vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda}) \\ \ddot{q}_{\lambda_2} + v_{\lambda}^2 q_{\lambda_2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Их решение, если учесть, что  $\vec{p} = \text{const}$ , таково:

$$\left. \begin{aligned} q_{\lambda_1} &= \frac{e\sqrt{8\pi}}{m} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda})}{v_{\lambda}^2} + q'_{\lambda_1} \\ q_{\lambda_2} &= q'_{\lambda_2} \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где  $q'_{\lambda i}$  — решения системы однородных уравнений соответствующей системы (8).

Если в начальный момент имеется равномерно движущийся электрон, не окруженный поперечным полем, и мы адиабатически включаем взаимодействие электрона с полем, то, поскольку адиабатическое включение соответствует физически бесконечно медленному разгону электрона до состояния движения с импульсом  $\vec{p}$ , электрон излучит одно свое увлекаемое поле. Энергия этого последнего получается, если в (5) подставить стационарное решение уравнений (8), так как стационарное решение, получающееся при  $q'_{\lambda i} = 0$ , как раз соответствует наличию одного увлекаемого поля. При этом мы получаем в точности выражение (2), которое, если ввести плотность состояний и проинтегрировать по углам, переходит в выражение

$$H_{tr} = \frac{4e^2}{3\pi c^3} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m^2} \right) \int_0^{v_{\max}} dv, \quad (10)$$

где  $v_{\max}$  — частота, на которой мы обрываем спектр. В случае точечного электрона максимальной частоты не существует, и, как и следовало

ожидать, электромагнитная масса  $M = \frac{4e^2}{3\pi c^3} \int_0^{v_{\max}} dv$  бесконечна.

Мгновенное включение взаимодействия соответствует мгновенному сообщению электрону импульса  $\vec{p}$ . Поэтому теперь для определения  $H_{tr}$  нужно в (5) подставить решения (8), удовлетворяющие начальным условиям:

$$q_{\lambda i} = \dot{q}_{\lambda i} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (11)$$

В результате имеем

$$H_{tr} = \frac{8\pi e^2}{m^2 c^2} \sum_{\lambda} \frac{(\vec{p} e_{\lambda})^2}{k_{\lambda}^2} \{1 - \cos(c|\vec{k}_{\lambda}|t)\}. \quad (12)$$

Если оборвать спектр на частоте  $\nu_{\max}$ , получим:

$$H_{tr} = \frac{8e^2}{3\pi c^3} \left( \frac{p^2}{2m^2} \right) \left( \nu_{\max} - \frac{\sin \nu_{\max} t}{t} \right). \quad (12')$$

Легко видеть, что  $H_{tr} = \overline{H}$  (средн. по  $t$ , где  $t$  велико) в точности равно выражению (3).

Излученная энергия больше при мгновенном включении возмущения, чем при адиабатическом, так как при мгновенном включении в начальный момент есть ускорение, и электрон, кроме увлекаемого, излучает и световое поле. В случае, если электрон обладает магнитным моментом и вначале энергия поперечного поля равна нулю, то при включении взаимодействия должна излучаться еще и магнитная энергия, соответствующая этому магнитному моменту. И действительно, легко показать, дополнив (1) членом  $-\vec{\mu} \vec{H}$ , где  $\vec{\mu}$  — магнитный момент, что как в квантовом, так и в классическом случаях электрон при адиабатическом включении взаимодействия излучает, помимо указанной, еще энергию магнитного момента:

$$H_{tr} = \frac{e^2 \hbar^2}{2\pi m^2 c^5} \int_0^{\nu_{\max}} \nu^2 d\nu. \quad (13)$$

При этом сделаны те же предположения в исходных уравнениях, как и раньше. Кроме того в классическом случае принято, что  $\vec{\mu}^2 = \frac{3e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2}$ . В квантовом случае мы пользовались уравнением Паули.

Увлекаемое поле может быть в ряде случаев отделено от светового, исходя из следующих соображений: общее решение однородных уравнений, соответствующих системе (6), всегда описывает световое поле, так как при подстановке его в (4) получаются плоские поперечные волны, движущиеся со скоростью  $c$ ; напротив, частное решение уравнений (6)\*, вообще говоря, световых волн не дает. Так, в случае равномерно движущегося электрона, если заменить в (6)  $\frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(r) \right)$  на  $\vec{v} = \text{const}$  и не полагать  $\vec{k}_{\lambda} = 0$ , получаемое частное решение при подстановке в (4) дает просто разложение векторного потенциала увлекаемого поля в ряд Фурье, т. е. описывает одно увлекаемое поле. В общем случае возможно существование областей частот, в которых решения однородных и неоднородных уравнений описывают физически неотличимые поля. Такими областями являются области резонанса, при наличии которого электрон излучает.

\* Выражение  $\frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(r) \right)$ , если отказаться от канонической формы уравнений, должно быть заменено на скорость электрона  $\vec{v}$ , которая при пренебрежении реакцией от координат поля не зависит.

Продолжая рассмотрение равномерно движущегося электрона, перейдем в (7), имеющем одинаковый внешний вид в классической и квантовых теориях\*, к новым переменным  $q'_{\lambda i}$ , определяемым из (9). Переменные  $q'_{\lambda i}$ , подчиняющиеся однородным уравнениям, описывают световое поле. Поэтому осуществляемое преобразование, дополнение которого до канонического тривиально ( $\vec{p}' = \vec{p}$ ;  $p'_{\lambda i} = p_{\lambda i}$ ), имеет смысл разделения увлекаемого и светового полей.

В новых переменных (7) принимает следующий вид:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}'^2 - \frac{8\pi e^2}{m^2 c^2} \sum_{\lambda} \frac{(\vec{p}' e_{\lambda})}{k_{\lambda}^2} + \frac{4\pi e^2}{m^2 c^2} \sum_{\lambda} \frac{(\vec{p}' e_{\lambda})}{k_{\lambda}^2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, i} (p'_{\lambda i}{}^2 + v_{\lambda}^2 q'_{\lambda i}{}^2), \quad (14)$$

где конечно в квантовом случае  $\vec{p}'$ ,  $p'_{\lambda i}$  и  $q'_{\lambda i}$  — операторы.

Полученное в (14) разделение переменных вполне понятно, так как при сделанных предположениях об отсутствии реакции и рассеяния равномерно движущийся электрон со световым полем не взаимодействует. Второй член в (14), представляющий собой энергию взаимодействия электрона с его собственным полем, расходится, и в сумме с подобным ему третьим членом в (14) дает в квантовой области так называемую трансверсальную расходимость. Сам третий член в (14), выделившийся из  $H_{ir}$  в (7), есть как раз энергия увлекаемого поля.

Заметим, что оператор типа (14) получен Паули и Фирцем<sup>(3)</sup> в связи с рассмотрением других вопросов.

Результаты, вполне аналогичные вышеизложенным, получаются, если рассматривать магнитный электрон с помощью уравнения Паули в квантовой области и соответствующего ему в классической. В случае электрона Дирака также можно, сделав предположения, эквивалентные отказу от учета реакции излучения на электрон, указанные Блохом и Нордсиком<sup>(4)</sup>, получить разделение переменных и выделение увлекаемого поля. Выражение (14) показывает также, что в рассмотренном случае увлекаемое поле не квантуется. Точнее его квантование, как и квантование продольного поля, из-за связей между отдельными осцилляторами поля, обусловливаемой наличием частиц (отсюда неоднородность уравнений), выпадает из рассмотрения. Важно подчеркнуть, что в то время как для продольного поля это выпадение имеет место всегда, для поперечного увлекаемого поля подобное утверждение уже повидимому неверно.

Действительно, в областях, где увлекаемое поле не отличимо от светового (см. выше), его квантование должно быть существенно.

Выражаю благодарность проф. И. Е. Тамму за руководство.

Оптическая лаборатория.  
Научно-исследовательский институт физики  
Московского государственного университета.

Поступило  
17 IV 1939.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> V. A. Fock, Sow. Phys., **6**, 425 (1934). <sup>2</sup> А. А. Смирнов, ЖЭТФ, **5**, 687 (1935). <sup>3</sup> W. Pauli u. M. Fierz, Nuovo Cimento, **15**, 167 (1938). <sup>4</sup> F. Bloch a. A. Nord sieck, Phys. Rev., **52**, 54 (1937).

\* Уравнения (6) и (8) тоже, если принять обозначение  $\dot{q}'_{\lambda i} = \frac{1}{i\hbar} \{q'_{\lambda i} H - H q'_{\lambda i}\}$ , остаются в силе в квантовой теории. Выражения (9) остаются решениями уравнений (8), если  $H$  имеет вид (7).