Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 IV 1939)

В этой последней части нашей работы * мы рассматриваем изгиб естественно закрученного стержня парой с моментом M, приложенной в торцевом его сечении ($z=0$). Мы ограничиваемся рассмотрением равномерно закрученного стержня [$\alpha(z)=\theta z$]. Уравнение его боковой поверхности:

$$f(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\quad x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0 \tag{1}$$

или после введения переменных

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha;\quad \eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha;\quad \zeta = z, \tag{2}$$

$$f(\xi, \eta) = 0. \tag{3}$$

Зададимся напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz} = -\beta E x + \beta\theta\sigma_{zz}^{(1)};\quad \sigma_{xx} = \beta\theta\sigma_{xx}^{(1)};\quad \sigma_{yy} = \beta\theta\sigma_{yy}^{(1)} \\ &\sigma_{xy} = \beta\theta\sigma_{xy}^{(1)};\quad \sigma_{xz} = \beta\theta\sigma_{xz}^{(1)};\quad \sigma_{yz} = \beta\theta\sigma_{yz}^{(1)} \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $\beta = \frac{M}{EI\eta}$, а $\sigma_{zz}^{(1)}$ и пр.—некоторые искомые функции от ξ, η, ζ. Для определения их с точностью до θ^2 получаем следующую задачу.

Уравнения равновесия:

$$L_1^{(1)} = 0;\quad L_2^{(1)} = 0;\quad L_3^{(1)} = 0; \tag{5}$$

здесь $L_1^{(1)} = \frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta}$.

Условия на боковой поверхности:

$$M_1^{(1)} = 0;\quad M_2^{(1)} = 0;\quad M_3^{(1)} = E\xi(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi); \tag{6}$$

здесь

$$M_1^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta;\ \ldots\ M_3^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta.$$

К этому добавляются условия совместности и интегральные условия на торцевом сечении, выражающие статическую эквивалентность напряжений изгибающей паре.

* См. ДАН, XXIII, № 1, XXIII, № 5 (1939).

Всем перечисленным условиям удовлетворим, положив:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{yy}^{(1)}=0\\
&\sigma_{xz}^{(1)}=-E\xi\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}+m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\eta\right)\\
&\sigma_{yz}^{(1)}=-\frac{E}{2}\xi^2+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}+m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\right)\\
&\sigma_{zz}^{(1)}=-\frac{E}{I_\xi}(I_\xi-I_\eta)\,\eta z.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Функция $\psi(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению:

$$\nabla^2\psi-E\eta=0 \tag{8}$$

внутри контура $f(\xi,\eta)=0$ и условию

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{3}{2}E\xi^2 f'_\eta=0 \tag{9}$$

на контуре.

Функция $\psi_0(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi_0+(1+\nu)\frac{J_\xi-J_\eta}{J_\xi}\eta=0 \tag{10}$$

и контурному условию

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial n}=-\frac{\nu E}{J_\xi}(J_\xi-J_\eta)\,\xi^2 f'_\eta, \tag{11}$$

т. е. является функцией изгиба для контура $f(\xi,\eta)=0$. Функция φ есть функция кручения для того же контура. Константа m определяется требованием равенства нулю крутящего момента в торцевом сечении.

Несмотря на то, что дополнительные напряжения получаются умножением величин $\sigma_{xz}^{(1)}$, $\sigma_{yz}^{(1)}$, $\sigma_{zz}^{(1)}$ на малый множитель $\beta\theta$, они могут быть все же практически очень значительны, так как, выбирая сечение достаточно тонким, можно отношение $\frac{J_\eta}{J_\xi}$ сделать сколь угодно большим.

Перемещения u и v не зависят от вида функций ψ, ψ_0 и φ и легко определяются в общем виде. Зная их, легко получить следующие соотношения между кривизной упругой линии и изгибающим моментом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{M}{EJ_\eta}\\
&\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{M}{E}\theta z\left(\frac{1}{J_\eta}-\frac{1}{J_\xi}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Эти соотношения с точностью до θ^2 совпадают с соотношениями, выведенными С. А. Тумаркиным [1] из общих уравнений Кирхгофа для бесконечно тонких стержней. Заметим, что из теории Кирхгофа эти соотношения получаются при помощи дополнительных гипотез, которых мы здесь не принимаем.

Перемещение w определяется через функции ψ, ψ_0 и φ. Фукция ψ легко определяется для тех контуров, для которых решена задача изгиба, так например для эллипса:

$$\psi=E\left\{\frac{1}{4}\xi^2\eta-\frac{1}{4}\eta^3+\frac{1}{3}\,\frac{a^2+2b^2-\frac{3}{4}(b^2-a^2)}{a^2+3b^2}(\eta^3-3\xi^2\eta)-\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}\eta\right\}.$$

Полученные результаты естественно обобщаются на случай, когда изгибающий момент имеет слагающие, действующие как в направлении оси x, так и в направлении оси y. Методом, изложенным в настоящей работе, можно рассмотреть также изгиб силой, приложенной на конце, что приведет, правда, к значительному усложнению задачи. Наконец вводя параметры, характеризующие сужение стержня, как это было сделано в работе Д. Ю. Панова ([2]), или характеризующие искривление его оси, можно рассмотреть деформации естественно закрученного стержня с переменным сечением и с искривленной осью.

Поступило
21 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Тумаркин, Труды ЦАГИ, вып. 341 (1937). [2] Д. Ю. Панов, ДАН, XX, № 4 (1938).