Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. АБРАМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ДАВЛЕНИЯ ШТАМПА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 11 III 1939)

Для случая симметричного давления штампа решение соответствующей задачи дано еще Буссинеском [1] [см. также [2]].

Если за плоскость x, y прямоугольной системы координат взять плоскость, ограничивающую упругое полупространство, то при отсутствии на этой плоскости касательных напряжений смещения u, v, w можно выразить через четыре гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ (обозначая через G модуль сдвига, а через m величину, обратную коэффициенту Пуассона) при помощи следующих формул [2]:

$$u=\varphi_1+x\frac{\partial\psi}{\partial x},\ v=\varphi_2+y\frac{\partial\psi}{\partial y},\ w=\varphi_3+z\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\psi=-\frac{m\varphi_3}{2(m-1)},\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=-\frac{m-2}{2(m-1)}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=-\frac{m-2}{2(m-1)}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}. \tag{2}$$

При помощи формул (1), (2) получаем формулы

$$Z_z=G\left\{\frac{m}{m-1}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+2z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}=G\left\{\frac{m}{m-1}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}-z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$w=\varphi_3-z\frac{m}{m-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}. \tag{4}$$

Таким образом в случае симметричного и несимметричного давления штампа задача сводится к отысканию одной гармонической функции φ_3.

1. Рассмотрим сперва случай действия одного момента M, плоскость пары которого пусть совпадает с плоскостью xz. Тогда при радиусе штампа R граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{gathered} w=\gamma x=\gamma r\cos\vartheta \text{ при } z=0 \text{ и } r=\sqrt{x^2+y^2}\leqq R,\\ Z_z=0 \text{ при } z=0 \text{ и } r=\sqrt{x^2+y^2}>R. \end{gathered} \tag{5}$$

В соответствии с этим для гармонической функции φ_3 получим следующие граничные условия:

$$\varphi_3=\gamma r\cos\vartheta \text{ при } z=0 \text{ и } r\leqq R,\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=0 \text{ при } z=0 \text{ и } r>R, \tag{6}$$

где γ — искомый угол наклона основания штампа.

Сперва строим частное решение уравнения Лапласа, $e^{-pz}J_1(pr)\cos\vartheta$, обращающееся в нуль на бесконечности и содержащее произвольный параметр p. При помощи этой функции и некоторой функции $A(p)$ мы можем построить решение, удовлетворяющее граничным условиям.

2*

Для этого достаточно определить надлежащим образом функцию $A(p)$ в выражении φ_3, взятом в виде определенного интеграла:

$$\varphi_3 = \int_0^\infty A(p)\, e^{-pz} J_1(pr)\, dp \cdot \cos\vartheta. \qquad (7)$$

Тогда граничные условия (6) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty A(p) J_1(pr)\, dp \cdot \cos\vartheta = \gamma r \cos\vartheta \quad && r \leqq R \\ &\int_0^\infty pA(p) J_1(pr)\, dp \cdot \cos\vartheta = 0 && r > R \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Необходимые условия в бесконечности будут также удовлетворяться.

Полагая

$$r = R\rho, \quad p = \frac{t}{R}, \quad pA(p) = \gamma R f(t), \qquad (9)$$

мы получим систему интегральных уравнений для определения $f(t)$:

$$\int_0^\infty t^{-1} f(t) J_1(t\rho)\, dt = \rho \; (\rho \leqq 1), \quad \int_0^\infty f(t) J_1(t\rho)\, dt = 0 \; (\rho > 1). \qquad (10)$$

Титчмарш ([3]) и Басбридж ([4]) дали решение несколько более общей системы уравнений

$$\int_0^\infty t^\alpha J_\nu(t\rho) f(t)\, dt = \rho \;\; (\rho < 1), \quad \int_0^\infty J_\nu(t\rho) f(t)\, dt = 0 \;\; (\rho > 1) \qquad (11)$$

в виде следующего очень простого выражения для $f(t)$:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}\alpha\right)} (2t)^{-\frac{1}{2}\alpha} J_{\nu+1+\frac{1}{2}\alpha}(t) \;\; (\text{при } \nu + 2 + \tfrac{1}{2}\alpha > 0). \qquad (12)$$

Таким образом для уравнений (10) с $\nu = 1$ и $\alpha = -1$ мы получим

$$f(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (2t)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right) \qquad (13)$$

и следовательно

$$A(p) = \frac{4\gamma}{\pi}\left(\frac{\sin pR}{p^2} - R\,\frac{\cos pR}{p}\right). \qquad (14)$$

Вычислим теперь производную

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = \frac{4\gamma}{\pi}\int_0^\infty \left(-\frac{\sin pR}{p} + R\cos pR\right) e^{-pz} J_1(pr)\, dp \cdot \cos\vartheta =$$

$$= -\frac{4\gamma}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin pR}{p} e^{-pz} J_1(pr)\, dp - R\int_0^\infty \cos pR e^{-pz} J_1(pr)\, dp\right\}\cos\vartheta. \qquad (15)$$

Второй член правой части, содержащий $\cos pR$, можно вычислить с помощью известного интеграла Бельтрами ([5]):

$$\int_0^\infty e^{-pz+ipR} J_1(pr)\, dp = \int_0^\infty e^{-pz}\cos pR \cdot J_1(pr)\, dp + i\int_0^\infty e^{-pz}\sin pR \cdot J_1(pr)\, dp =$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{z - iR}{Z - iB}\right), \qquad (16)$$

где эллиптические координаты Z и B связаны с цилиндрическими z и r при помощи соотношений

$$r^2+z^2-R^2=Z^2-B^2, \quad zR=ZB, \tag{17}$$

или

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(r^2+z^2-R^2)^2+4z^2R^2}-(r^2+z^2-R^2)\right)},$$
$$Z=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(r^2+z^2-R^2)^2+4z^2R^2}+(r^2+z^2-R^2)\right)}. \tag{18}$$

Полагая

$$Z=R\sigma, \quad B=R\mu, \tag{19}$$

получим для z и r выражения

$$z=R\sigma\mu, \quad r=R\sqrt{(1-\mu^2)(1+\sigma^2)} \quad (0\leqq\mu\leqq 1,\ 0\leqq\sigma\leqq\infty). \tag{20}$$

Введение эллиптических координат σ, μ значительно упрощает все формулы и вычисления. Полагая $\mu=0$ и оставляя σ переменным, мы получим внешнюю часть $r\geqq R$ плоскости $z=0$. Внутренняя часть $r\leqq R$, расположенная под штампом, соответствует значению $\sigma=0$ и значениям $0\leqslant\mu\leqslant 1$.

Формулы (20) непосредственно дают нам значения частных производных σ и μ по z. Дифференцируя, мы найдем

$$1=R\mu\frac{\partial\sigma}{\partial z}+R\sigma\frac{\partial\mu}{\partial z}, \quad 0=R\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{1+\sigma^2}}\cdot\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial z}-R\frac{\sqrt{1+\sigma^2}}{\sqrt{1-\mu^2}}\mu\frac{\partial\mu}{\partial z}, \tag{21}$$

откуда

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{\mu(1+\sigma^2)}{R(\mu^2+\sigma^2)}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial z}=\frac{\sigma(1-\mu^2)}{R(\mu^2+\sigma^2)}. \tag{22}$$

Вводя в интеграл (16) выражения Z и B через σ и μ, а также отделяя мнимую часть от вещественной, найдем формулы

$$\int_0^\infty e^{-pz}\cos pR\cdot J_1(pr)\,dp=\frac{1}{r}\cdot\frac{(1-\mu)(\sigma^2-\mu)}{(\mu^2+\sigma^2)}, \tag{23}$$

$$\int_0^\infty e^{-pz}\sin pR\cdot J_1(pr)\,dp=\frac{1}{r}\cdot\frac{\sigma(1-\mu^2)}{(\mu^2+\sigma^2)}=\frac{R}{r}\frac{\partial\mu}{\partial z}. \tag{24}$$

Интегрируя обе стороны последнего равенства (24) по z, найдем:

$$\int_0^\infty e^{-pz}\frac{\sin pR}{p}J_1(pr)\,dp=-\frac{1}{r}R\mu+C(r). \tag{25}$$

Полагая $\mu=0$, что соответствует внешней части $r\geqq R$ плоскости $z=0$, получим:

$$C(r)=\int_0^\infty\frac{\sin pR}{p}J_1(pr)\,dp=\frac{P}{r} \quad (r>R). \tag{26}$$

[Это выражение для $C(r)$ остается в силе также и при $r<R$].

Таким образом мы найдем значение интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-pz}\frac{\sin pR}{p}J_1(pr)\,dp=\frac{R(1-\mu)}{r} \tag{27}$$

и значение производной (15)

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=-\frac{4\gamma}{\pi}\cos\vartheta\left[\frac{R(1-\mu)}{r}-\frac{R(1-\mu)(\sigma^2-\mu)}{r(\sigma^2+\mu^2)}\right]=-\frac{4\gamma\cos\vartheta R\mu(1-\mu^2)}{\pi r(\sigma^2+\mu^2)}=$$
$$=-\frac{4\gamma r}{\pi(1+\sigma^2)^2}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z}\cos\vartheta. \tag{28}$$

Отсюда интегрируя, непосредственно находим выражение для φ_3:

$$\varphi_3 = -\frac{4\gamma r}{2\pi}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma^2} + \operatorname{arctg}\sigma\right]\cos\vartheta + C_1(r, \vartheta). \tag{29}$$

Для получения значения дополнительного члена $C_1(r, \vartheta)$, происходящего от интегрирования, достаточно положить $\sigma = 0$, что эквивалентно $z = 0$ и $r \leqslant R$.

Мы имеем

$$C_1(r, \vartheta) = (\varphi_3)_{z=0,\, r\leqslant R} = \gamma r \cos\vartheta \tag{30}$$

и следовательно

$$\varphi_3 = -\frac{\gamma r}{\pi}\left(\frac{2\sigma}{1+\sigma^2} + 2\operatorname{arctg}\sigma - \pi\right)\cos\vartheta. \tag{31}$$

Остается вычислить γ. Предполагая, что момент M внешних сил задан, имеем $M = \int Z_z\, x dx dy$, где интегрирование производится по площади круга радиуса R. Пользуясь формулой (3), мы для $r < R$ и $z = 0$ находим величину Z_z:

$$(Z_z)_{\substack{z=0\\ z\leqslant R}} = G\frac{m}{m-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = -G\frac{m}{m-1}\cdot\frac{4\gamma R(1-\mu^2)\cos\vartheta}{\pi r\mu} =$$

$$= -G\frac{m}{m-1}\cdot\frac{4\gamma R}{\pi r}\cdot\frac{r^2\cos\vartheta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} = -G\frac{m}{m-1}\cdot\frac{4\gamma R\cos\vartheta}{\pi\sqrt{R^2-r^2}}. \tag{32}$$

Таким образом, интегрируя, получим:

$$M = \int Z_z x dx dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} -\frac{Gm}{m-1}\cdot\frac{4\gamma r\cos\vartheta}{\pi\sqrt{R^2-r^2}}\, r\cos\vartheta\, dr\, d\vartheta = -\int_0^R \frac{Gm}{m-1}\cdot\frac{4\gamma r^3 dr}{\sqrt{R^2-r^2}} =$$

$$= -\frac{Gm}{m-1}\, 4\gamma R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = -\frac{8}{3}G\frac{m}{m-1}\gamma R^3 \tag{33}$$

и следовательно

$$\gamma = -\frac{3}{8}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{M}{GR^3}. \tag{34}$$

Теперь займемся общими выражениями Z_z и w для всего полупространства. Мы имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{4\gamma\cos\vartheta}{\pi}\cdot\frac{\sigma(1-\mu^2)(\mu^4+5\sigma^2\mu^2+3\mu^2-\sigma^2)}{r(\sigma^2+\mu^2)^3} \tag{35}$$

и следовательно

$$Z_z = G\frac{m}{m-1}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} - z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}\right) = \frac{3Mr\mu(1-\mu^2)}{2\pi rR^2(\sigma^2+\mu^2)^3}(\mu^4+5\sigma^2\mu^2-\mu^4\sigma^2+5\sigma^4\mu^2)\cos\vartheta; \tag{36}$$

$$w = \varphi_3 - \frac{m}{2(m-1)}z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{GR^3}\left\{\frac{m-1}{m}r\left(\frac{\sigma}{1+\sigma^2} - \operatorname{arcctg}\sigma\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{zR\mu(1-\mu^2)}{r(\sigma^2+\mu^2)}\right\}\cos\vartheta. \tag{37}$$

2. Аналогичные формулы можно вывести для случая симметричного распределения напряжений под штампом. Мы найдем ([2]):

$$\varphi_3 = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin pR}{p} J_0(pr)e^{-pz}dp = \frac{2k}{\pi}\operatorname{arcctg}\sigma, \tag{38}$$

где параметр k связан с заданной силой давления P соотношением

$$k = \frac{P(m-1)}{4GmR}.$$

Отсюда, дифференцируя, получим [см. также ([5])]:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty - \sin pR \cdot J_0(pr)\, e^{-pz}\, dp = \frac{\partial \varphi_3^*}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3^*}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} =$$

$$= -\frac{2k}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\sigma^2} \cdot \frac{\mu(1+\sigma^2)}{R(\mu^2+\sigma^2)} = -\frac{2k}{\pi R} \cdot \frac{\mu}{\mu^3+\sigma^2}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} = \frac{2k}{\pi R^2} \cdot \frac{\sigma(3\mu^2+\sigma^2+3\mu^2\sigma^2-\mu^4)}{(\mu^2+\sigma^2)^3} \tag{41}$$

и следовательно [см. также ([6])]:

$$\left.\begin{aligned} Z_z = G\frac{m}{m-1} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - z\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2}\right\} = -\frac{P}{2\pi R}\left\{\frac{\mu}{R(\mu^2+\sigma^2)} + \right. \\ \left. + \frac{z}{R^2} \cdot \frac{\sigma(3\mu^2-\sigma^2+3\mu^2\sigma^2-\mu^4)}{(\mu^2+\sigma^2)^3}\right\} = -\frac{P\mu(\mu^4+5\mu^2\sigma^2+3\mu^2\sigma^4-\mu^4\sigma^2)}{2\pi R^2(\mu^2+\sigma^2)^3} \\ w = \varphi_3 - \frac{m}{2(m-1)} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{P}{4\pi RG}\left\{2\frac{m-1}{m} \operatorname{arcctg}\sigma + \frac{z\mu}{R(\sigma^2+\mu^2)}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

3. Если сила P приложена в точке штампа, находящейся на расстоянии $x = l$ от его оси, то действие такой силы сводится к действию момента $M = -Pl$ и силы P, приложенной в центре тяжести, так что получим

$$Z_z = \frac{P}{2\pi R^2}\left\{-\frac{\mu}{(\mu^2+\sigma^2)^3}(\mu^4+5\mu^2\sigma^2+3\mu^2\sigma^4-\mu^4\sigma^2) - \right.$$

$$\left. -\frac{3(1-\mu^2)\mu}{r(\sigma^2+\mu^2)^3}(\mu^4+5\mu^2\sigma^2-2\mu^4\sigma^2+5\sigma^4\mu^2)\, l\cos\vartheta\right\} = -\frac{P\mu}{2\pi R^2(\mu^2+\sigma^2)^3}\left\{\mu^4+5\mu^2\sigma^2 + \right.$$

$$\left. + 3\mu^2\sigma^4 - \mu^4\sigma^2 + \frac{3}{r}(1-\mu^2)(\mu^4+5\mu^2\sigma^2+\mu^4\sigma^2+5\mu^2\sigma^4)\, l\cos\vartheta\right\}, \tag{43}$$

$$w = \frac{P}{4\mu RG}\left\{2\frac{m-1}{m}\operatorname{arcctg}\sigma + \frac{z\mu}{(\sigma^2+\mu^2)R} - \frac{3}{R^2}\left[\frac{m-1}{m} r\left(\frac{\sigma}{1+\sigma^2} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \operatorname{arcctg}\sigma - \frac{zR\mu(1-\mu^2)}{r(\sigma^2+\mu^2)}\right)\right] l\cos\vartheta\right\}. \tag{44}$$

Под штампом в части $r \leqslant R$ плоскости $z = 0$, т. е. при $\sigma = 0$, мы получим:

$$r = R\sqrt{1-\mu^2},\quad w = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{P(2R^2+3lx)}{8GR^3},\quad \gamma = \frac{3}{8} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{Pl}{GR^3},$$

$$Z_z = \frac{P}{2\pi R^2}\left[-\frac{1}{\mu} - \frac{3}{r}\frac{1-\mu^2}{\mu} l\cos\vartheta\right] = -\frac{P(3lx+R^2)}{2\pi R^3\sqrt{R^2-r^2}}. \tag{45}$$

Напряжения Z_z будут во всех точках круга $r \leqq R$ основания штампа сжимающими лишь при условии, что плечо l меньше, чем $\frac{R}{3}$:

$$l \leqq \frac{R}{3} \tag{46}$$

Поступило
1 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Boussinesq, Applications des potentiels. [2] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, пер. с нем., стр. 290—295, 764—766 (1937). [3] E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, p. 335 (1937). [4] Ida W. Busbridge, Proc. Lond. Math. Soc., 44 (1938). [5] А. Вебстер—Г. Сеге, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. II, пер. с нем., § 121, стр. 242—245 (1934). [6] К. Е. Егоров, Сборник № 9 Трудов лаборатории оснований и фундаментов сооружений (бывш. НИС Фундаментстроя), стр. 29—48 (1938).