Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

ФИЗИКА

М. А. МАРКОВ

О РОЛИ НУЛЕВЫХ СОСТОЯНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 27 IV 1939)

В. Паули и М. Фирц (1) исследовали излучение длинных волн при торможении электрического заряда в слабом внешнем поле. Авторы рассматривают дипольное излучение и, пользуясь нерелятивистской формулировкой задачи, вводят с самого начала пространственные размеры тормозящегося заряда. Полученное авторами поперечное сечение для излучения длинных волн, оказывается, существенным образом содержит параметр, характеризующий пространственные размеры заряженного тела:

$$dq = \mathrm{const}\,\frac{dE}{E}\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C, \qquad (1)$$

где ω_1 — некая предельная частота, связанная с размерами тела (r_0) соотношением

$$\omega_1 = \frac{2\pi c}{r_0}, \qquad (2)$$

$$C = \frac{2}{3\pi}\,\frac{e^2}{hc}\left(\frac{v_0 - v_0'}{c^2}\right)^2, \qquad (3)$$

где v_0 и v_0' — начальные и конечные скорости заряженного тела.

Авторы приходят к заключению, что обсуждаемая трудность (для точечного электрона — $\omega_1 \to \infty$) связана с фундаментальными трудностями квантовой электродинамики.

Действительно, существенная роль параметра, характеризующего размеры тела в выражении (1), казалось бы, дает указание на источник этих трудностей. Однако, как выясняется из дальнейшего, роль пространственных размеров заряда здесь не прямая. На примере с расходимостью от $(A)^2$ (A—вектор-потенциал собственного поля электрона) легко убедиться, что расходимость $\left(\sim \int\limits_0^\infty \omega\, d\omega\right)$, заведомо связанная с нулевыми состояниями осцилляторов электромагнитного поля, превращается в конечный член, если рассмотреть эту же проблему для протяжения заряда, причем пространственные размеры заряда существенно входят в окончательное выражение (2) $\left(\text{а именно} \sim \int\limits_0^\infty \omega d\omega \to \frac{h}{mc^2} 4\pi \frac{e^2}{r_0^2}\right)$. Дело здесь просто в том, что радиус электрона в данном случае играет роль «обрывающего фактора» для спектра частот нулевых состояний осцилляторов электромагнитного поля. Можно думать, что и в проблеме, рассматриваемой Паули и Фирцем, имеет место это же обстоятельство.

К сожалению роль нулевых состояний осцилляторов поля в высших приближениях обычной теории излучения до сих пор совершенно не рассматривалась. Как известно, высшие приближения обычной теории излучения расходятся. Некоторые из расходящихся интегралов, как выясняется ([2]), обязаны своим происхождением как раз нулевым состояниям этих осцилляторов. А так как Паули и Фирц применяют метод решения задачи, который содержит в окончательном результате высшие приближения обычной теории излучения, то естественно рассмотреть роль нулевых состояний осцилляторов поля и в данной конкретной задаче.

И действительно, как показано ниже, все особенности теории излучения, построенной В. Паули и М. Фирцем, связаны с нулевыми состояниями осцилляторов поля и с расходимостями, которые обязаны своим происхождением нулевым состояниям этих осцилляторов.

Рассмотрим предварительно линейно осциллирующий электрон. Пусть гамильтонова функция имеет вид ([2]):

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2)h\nu+\frac{1}{2}\sum_s(P_s^2+Q_s^2)h\omega_s-\sum h^2\omega_s(\bar{\alpha}_s\bar{p})P_s,$$

член $u=-\sum h^2\omega_s(\bar{\alpha}_s\bar{p})P_s$ будем рассматривать как возмущение.

Во втором приближении поправка к энергии запишется:

$$H''_{\substack{N=0\\ n_s=0}}=-\frac{1}{3}\frac{h\nu e^2}{\pi mc^3}\int_0^\infty d\omega+\frac{h\nu^2}{\pi mc^3}\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega+\nu} \tag{4}$$

(осциллирующий электрон в основном состоянии $N=0$; фотонов нет, $n_s=0$, членом A^2 пренебрегается).

Смысл интегралов немедленно выясняется, если в исходной гамильтоновой функции сделать каноническое преобразование, отделяющее «связанные» фотоны от «свободных» ([1], [2]):

$$\left.\begin{aligned}\bar{q}=\bar{q}'-h\sum\bar{\alpha}_sQ_s;\qquad \bar{p}=\bar{p}'\\ Q_s=Q_s';\qquad P_s=P_s'+(\bar{p}'\alpha_s)\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Смысл первого члена—магнитная энергия точечного электрона. Расходимость второго интеграла всецело связана с нулевыми состояниями осцилляторов электромагнитного поля.

Действительно, благодаря преобразованию (5) из потенциальной энергии старой гамильтоновой функции выделяется член, независящий от импульса (p) электрона:

$$\frac{q^2}{2}\longrightarrow\frac{q'^2}{2}+\frac{h^2}{2}\sum_s\bar{\alpha}_s^2Q_s^2+\ldots \tag{6}$$

Второй интеграл в (4) (обозначим его через I_2) обязан своим происхождением именно члену:

$$\mathrm{const}\sum\alpha_s^2Q_s^2. \tag{7}$$

I_2 получается, как среднее значение (7) в нулевом состоянии осцилляторов поля:

$$I_2\longrightarrow\mathrm{const}\sum\alpha_s^2\int\varphi_{n_s}Q_s^2\varphi_{n_s}\,dQ_s\Big|_{n_s=0}=\mathrm{const}\sum\alpha_s^2(2n_s+1)\Big|_{n_s=0}. \tag{8}$$

При этом:

а) I_2 не зависит от состояния осциллирующего электрона (числа N),

б) при $n_s = 0$ (отсутствие фотонов) I_2 не обращается в нуль потому и только потому, что имеется «нулевое движение» осцилляторов электромагнитного поля.

В других формулах, подобных (8), могут встретиться матричные элементы, представляющие собой средние значения величины (Q_s^k) в нулевом состоянии осцилляторов электромагнитного поля

$$\int \varphi_{0_s}^{*} Q_s^k \varphi_{0_s} dQ_s. \tag{9}$$

Очевидно, что эти средние величины не исчезают благодаря нулевым колебаниям этих осцилляторов.

Матричные элементы типа (9) играют существенную роль в теории Паули и Фирца. Действительно, если сравнивать метод Паули и Фирца с методом обычной теории излучения, то легко видеть, что все существенные отличия теории Паули и Фирца обусловлены наличием фактора:

$$e^{-\sum\limits_s W_s}, \tag{10}$$

где

$$e^{-W_s} = (\overline{p}_0'; \ 0_s \mid k \mid \overline{p}_0; \ 0_s) = \int \varphi_{0_s}^{*} e^{i(\overline{p}_0' - \overline{p}_0)\overline{\alpha}_s Q_s} \varphi_{0_s} dQ_s; \tag{11}$$

здесь $\overline{p}_0'$ и $\overline{p}_0$ — конечные и начальные значения импульсов тормозящегося заряда. W_s появляется в результате интегрирования (11).

Выражение (11) представляет собой как-раз среднее значение оператора

$$e^{i(\overline{p}_0' - \overline{p}_0)\overline{\alpha}_s Q_s} \tag{12}$$

в нулевом состоянии осциллятора сорта s.

Выражение (11) появляется только благодаря нулевым колебаниям осцилляторов электромагнитного поля.

Существенное отличие метода Блоха—Нордсика—Паули—Фирца от метода обычной теории излучения заключается в том, что взаимодействие материи с излучением $\left(\text{т. е. член } \frac{\overline{p}}{m} \frac{e}{c} \overline{A}\right)$ не считается малым [т. е. член $\overline{p}\overline{A}$ включается в невозмущенный оператор; действие тормозящего поля $(v(r))$ рассматривается как возмущение].

В качестве невозмущенной функции Паули и Фирц берут функцию

$$\psi = e^{i\frac{\overline{p}\overline{r}}{h}} e^{i\sum\limits_s \overline{p}\overline{\alpha}_s Q_s} \prod_s \varphi_{n_s}, \tag{13}$$

которая включает в себе все высшие приближения обычной теории излучения от члена $\left(\frac{\overline{p}}{m} \frac{e}{c} \overline{A}\right)$. (Ограничения: нерелятивистский случай, дипольное излучение.)

И обратно, вычисляя ψ в высших приближениях обычной теории излучения, считая $\frac{\overline{p}}{m} \frac{e}{c} \overline{A}$ малым, мы получаем некоторое сложное выражение, которое однако можно привести к виду:

$$\psi = \Phi_0 + \frac{i}{1!}\left(\sum_s \overline{p}\overline{\alpha}_s Q_s\right)\Phi_0 + \\ + \frac{1}{2!}\left(i \sum_s \overline{p}\overline{\alpha}_s Q_s\right)^2 \Phi_0 + \ldots = \Phi_0 + \Phi_0' + \Phi_0'' + \ldots \tag{14}$$

Беря n членов ряда (14) в качестве невозмущенной функции и вычисляя дальше торможение заряда в слабом внешнем поле $v(r)$ по Паули и Фирцу, мы получим результат Паули и Фирца в n-ом приближении обычной теории излучения, только член, соответствующий в этом приближении фактору e^{-W_s}, получается в виде ряда членов типа (9):

$$e^{-W_s} \rightarrow 1 + i(\bar{p}_0' - \bar{p}_0)\bar{\alpha}_s \int \varphi_{0_s}^* Q_s \varphi_{0_s} dQ_s + \ldots$$
$$\ldots \int \varphi_{0_s} Q_s^k \varphi_{0_s} dQ_s + \ldots \tag{15}$$

Таким образом фактор e^{-W_s} происходит, как это было сказано и раньше, от нулевых колебаний осцилляторов электромагнитного поля.

В этом свете становятся понятными все, на первый взгляд странные, результаты теории Паули и Фирца.

Действительно, роль например радиуса электрона в (1) становится тривиальной, его задача—обрезать спектр нулевых состояний, которые по существу современной квантовой электродинамики неизбежно присутствуют в аппарате теории даже в том случае, если мы интересуемся излучением очень длинных волн.

В данном случае законность обычного метода теории излучения—это законность разложения (13) в ряд (14). Метод явно незаконен на границе спектра торможения (где интенсивность излучения $I_{\omega \to 0} = I_0$ — конечна, а число фотонов $n_s = \frac{I_0}{h\omega_s \to 0} \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности), так как для больших n_s (символически), $Q_s \approx \sqrt{n_s} \rightarrow \infty$, разложение (13) в ряд (14) незаконно.

А так как вообще $Q_s \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$ (из-за нулевых колебаний осцилляторов поля), точнее

$$Q_s \varphi_{n_s} = \sqrt{\frac{n_s}{2}}\varphi_{n_s - 1} + \sqrt{\frac{n_s+1}{2}}\varphi_{n_s+1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\varphi_{0_s+1},$$
при $n_s = 0$

то

$$\left(i \sum \bar{p}\bar{\alpha}_s Q_s\right)^k \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(i \sum \bar{p}\bar{\alpha}_s\right)^k.$$

Легко видеть, что эти выражения расходятся $\left(\text{например } \sum\limits_s i\bar{p}\bar{\alpha}_s)^2 \approx \approx \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\right)$, поэтому в высших приближениях теории обычный метод теории излучения вообще неприменим из-за нулевых колебаний осцилляторов электромагнитного поля.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.

Поступило
3 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Nuovo Cim. Marzo, 167 (1938). [2] M. M a r k o v, Journ. of Phys. (в печати).