Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

МАТЕМАТИКА

А. ГЕЛЬФОНД, член-корреспондент Академии Наук СССР

О РЯДЕ ТЕЙЛОРА, АССОЦИИРОВАННОМ С ЦЕЛОЙ ФУНКЦИЕЙ

В ряде вопросов теории функций, например в проблеме роста целой функции, в вопросе распределения особенностей ряда Тейлора на круге сходимости [1], в проблемах интерполяции [2], играет весьма существенную роль ряд Тейлора, ассоциированный по Борелю с данной целой функцией первого порядка и конечного типа. Мы называем функцию $f(z)$ ассоциированной, по Борелю, с $F(z)$, если

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n, \quad \text{а} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}. \tag{1}$$

Как известно, если тип целой функции первого порядка $F(z)$ есть σ, то функция $f(z)$ регулярна всюду вне круга $|z|\leqq\sigma$. В настоящей заметке я даю одно из естественных обобщений понятия ассоциированного с данной целой функцией ряда Тейлора. Именно, пусть α действительно число. Тогда я называю функцию $f_\alpha(z)$ α-ассоциированной с целой функцией $F(z)$, первого порядка и конечного типа σ, если

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n, \quad \text{а} \quad f_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}a_n}{z^{n+1}}. \tag{2}$$

Функция $f_\alpha(z)$ очевидно также будет регулярна всюду вне круга $|z|\leqq\sigma$, так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\sigma$ по известным свойствам целых функций первого порядка и конечного типа. Между функциями $F(z)$ и $f_\alpha(z)$ существует связь, аналогичная связи между целой функцией и ассоциированным с ней по Борелю рядом Тейлора. Связь эта дается формулами:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c U(z\xi)f_\alpha(\xi)\,d\xi,$$

$$F^{(n)}(e^{\alpha n i}z)=\frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{2\pi i}\int_c \xi^n U(z\xi)f_\alpha(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

где c есть окружность $|\xi|=r$, $r>\sigma$, σ — тип целой функции $F(z)$, а функция $U(z)$ есть

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{n!}z^n. \tag{4}$$

Функция $U(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $U'(z) = U(e^{-i\alpha} z)$ и играет в этом преобразовании ту же роль, что и функция e^z в борелевском.

Формулы (3) доказываются без всяких затруднений разложением функций $f_\alpha(z)$ в ряд и почленным интегрированием этого ряда. С помощью определенной таким образом функции $f_\alpha(z)$ могут быть легко доказаны две теоремы, одна из которых относится к вопросу о структуре целой функции, имеющей заданные производные в данной последовательности точек, а другая — к разысканию решений, в классе целых функций, одного типа линейных функциональных уравнений.

Теорема 1. *Если целая функция $F(z)$ порядка 1 и типа σ подчиняется условиям $F^n(e^{\alpha n i})=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, то она должна иметь вид*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{P_k-1} C_{k,}\quad z^s U(\lambda_k z),\ U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{n!}-z^n, \tag{5}$$

где $C_{k,s}$ — постоянные, P_k — кратность нуля λ_k функции $U(z)$ и сумма по k взята по всем корням λ_k функции $U(z)=0$, не превосходящим по модулю числа σ, $|\lambda_k| \leqq \sigma$, $k=0, 1, \ldots m$, $|\lambda_{m+1}| > \sigma$.

Из условий нашей теоремы и формул (3) следует, что при $\sigma_1 > \sigma$

$$F^{(n)}(e^{\alpha n i})=\frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=\sigma_1}\xi^n U(\xi) f_\alpha(\xi)\, d\xi=0, \tag{6}$$
$$n=0, 1, 2, 3, \ldots.$$

где $f_\alpha(\xi)$ есть α-ассоциированная с $F(z)$ функция. Из соотношений (6) непосредственно следует, что $U(\xi) f_\alpha(\xi)=\varphi(\xi)$ есть целая функция ξ, так как $U(\xi)$ есть целая функция, а $f_\alpha(\xi)$ регулярна в бесконечности. Значит, $f_\alpha(\xi)$, все особенности которой должны лежать внутри круга $|\xi| \leqq \sigma$, имеет вид

$$f_\alpha(\xi)=\sum_{k=0}^{m}\frac{P_k(\xi)}{(\xi-\lambda_k)^{P_k}},\quad P_k(\xi)=\sum_{s=0}^{P_k-1} A_{k,s}\,\xi^s, \tag{7}$$

где λ_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, есть все корни $U(z)=0$, лежащие в круге $|z| \leqq \sigma$, а $A_{k,s}$ — постоянные. Из формулы (7) на основании соотношений (3) между $F(z)$ и $f_\alpha(z)$ и следует наша теорема.

Теорема. 2. *Если целая функция $F(z)$ 1-го порядка и типа σ удовлетворяет функциональному уравнению с постоянными коэффициентами b_k, $k=0, 1, 2\ldots$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k F^{(k)}(e^{\alpha k i} z)=\Phi(z),\quad \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1}{\tau}, \tag{8}$$

где $\Phi(z)$ — целая функция порядка 1-го и типа σ_1, $\sigma_1 \leqq \sigma < \tau$, то она может быть представлена в форме

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r} U(z\xi)\frac{\varphi_\alpha(\xi)}{v_\alpha(\xi)}\, d\xi+\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{P_k-1} C_{k,s}\, z^s U(\lambda_k z), \tag{9}$$

где $\varphi_\alpha(\xi)$ α-ассоциирована с $\Phi(\xi)$, $v_\alpha(\xi)=\sum_{k=}^{\infty} e^{-\frac{k(k-1)}{2}\alpha i} b_k\,\xi^k$, $U(z)$ опреде-

лено ранее (форм. 5), сумма в правой части равенства (9) взята по всем нулям λ_k с кратностью P_k, функции $v_\alpha(\xi)$ в круге $\xi \leqq \sigma$, $|\lambda_k| \leqq \sigma$, $k=0, 1, 2, \ldots, m$, $|\lambda_{m+1}| > \sigma$, r подчиняется неравенствам $\sigma < r < |\lambda_{m+1}|$, а $C_{k,s}$, $0 \leqq s \leqq P_k - 1$, $0 \leqq k \leqq m$ — постоянные числа.

Формула (9) дает общее решение уравнения (8) в классе целых функций 1-го порядка, тип которых не превышает σ. Число произвольных постоянных, входящих в это общее решение, равно числу нулей функции $v_\alpha(z)$ в круге $(z) \leqq \sigma$, причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

На основании формул (3) уравнение (8) может быть записано в форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} U(z\xi)[v_\alpha(\xi) f_\alpha(\xi) - \varphi_\alpha(\xi)]\, d\xi = 0, \tag{10}$$

где $f_\alpha(\xi)$ α-ассоциирована с $F(\xi)$, $v_\alpha(\xi)$ и $\varphi_\alpha(\xi)$ определены в условии теоремы, а R — произвольное положительное число, подчиненное неравенствам $\sigma < R < \tau$.

Так как равенство (10) должно иметь место при всех значениях z и все особенности функций $\varphi_\alpha(z)$ и $f_\alpha(z)$ должны лежать внутри круга $|z| \leqq \sigma$, $\sigma < \tau$, то функция $v_\alpha(\xi) f_\alpha(\xi) - \varphi_\alpha(\xi)$ должна быть регулярна в круге $|\xi| < \tau$, и значит, $f_\alpha(z)$ имеет вид

$$f_\alpha(\xi) = g(\xi) + \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\xi)}{(\xi - \lambda_k)^{P_k}}, \quad P_k(\xi) = \sum_{s=0}^{P_k - 1} C_{k,s} \xi^s, \tag{11}$$

где сумма взята по всем нулям λ_k, кратности P_k, функции $v_\alpha(\xi)$ в круге $|\xi| \leqq \sigma$; $k=0, 1, 2, \ldots m$, $|\lambda_k| < \sigma$, $|\lambda_{m+1}| > \sigma$, $C_{k,s}$ — постоянные числа, а $g(\xi)$ есть главная часть ряда Лорана в кольце $\sigma < |\xi| < |\lambda_{m+1}|$ функции $\frac{\varphi_\alpha(\xi)}{v_\alpha(\xi)}$.

Из представления (11) функции $f_\alpha(z)$ и формул (3), дающих связь между $f_\alpha(z)$ и $F(z)$, следует уже непосредственно наша теорема.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
19 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Polya, Math. ZS., **29**, 549 (1929). [2] A. Gelfond, Recueil Mathem., **4(46)**, № 1 (1938).