Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

ФИЗИКА

А. И. АХИЕЗЕР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 27 IV 1939)

1. Известно, что газ свободных электронов благодаря квантованию энергии электрона в магнитном поле приобретает диамагнитный момент, который для слабых полей $\mu H \ll kT$ $\left(\mu = \frac{e\hbar}{mc},\ H\text{—поле},\ T\text{—}\right.$ $\left.\text{температура}\right)$ составляет одну треть от парамагнитного момента, обязанного спину [1]. При низких температурах и полях, удовлетворяющих условию $\mu H \ll \varepsilon_0$ (ε_0—химический потенциал), магнитный момент, как было показано Ландау [2], является сложной, быстро меняющейся функцией поля.

Вычисление магнитного момента производится следующим образом. Необходимо вычислить сумму

$$\Omega = -kT\sum \ln\left(1 + e^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{kT}}\right),$$

распространенную по всем собственным значениям энергии электрона ε. Магнитный момент M связан с Ω соотношением

$$M = -\frac{\partial\Omega}{\partial H}.$$

Собственные значения энергии электрона в магнитном поле с учетом спина равны [1]

$$\varepsilon = n\mu H + \frac{p^2}{2m} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(p—компонента импульса вдоль поля).

Учитывая веса различных состояний и вводя безразмерные величины $\eta = \frac{\mu H}{\varepsilon_0}$, $\tau = \frac{kT}{\varepsilon_0}$, $u = \frac{p}{\sqrt{m\varepsilon_0}}$, перепишем Ω, отнесенную к единице объема, в виде

$$\Omega = -\left(\frac{\sqrt{m\varepsilon_0}}{\hbar}\right)^3 \frac{\varepsilon_0\tau\eta}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[1 + e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{u^2}{2}\right)}\right]du + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[1 + e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta n-\frac{u^2}{2}\right)}\right]du\right).$$

Рассмотрим тот случай, когда τ и $\eta \ll 1$.

Для вычисления суммы воспользуемся формулой суммирования Пуассона

$$\frac{1}{2} f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx+2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos 2\pi n x dx.$$

Полагая в этой формуле $f(n)=\ln\left(1+e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta n-\frac{u^2}{2}\right)}\right)$, получим следующее выражение для Ω:

$$\Omega=-\left(\frac{\sqrt{m \varepsilon_0}}{\hbar}\right)^3 \frac{\varepsilon_0 \tau \eta}{2\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{0}^{\infty} \ln\left[1+e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta x-\frac{u^2}{2}\right)}\right] dx+\right.$$

$$\left.+2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{0}^{\infty} \ln\left[1+e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta x-\frac{u^2}{2}\right)}\right] \cos 2\pi n x\, dx\right).$$

Вычисление входящих сюда интегралов производится весьма просто путем интегрирования по частям и использования δ-образного характера производной от фермиевской функции. Рассмотрим интеграл

$$I_0(u)=\int_{0}^{\infty} \ln\left[1+e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta x-\frac{u^2}{2}\right)}\right] dx=\frac{1}{2} \frac{\eta}{\tau} \int_{-\frac{1-\frac{u^2}{2}}{\tau}}^{\infty} \frac{x^2 e^z dz}{(e^z+1)^2} \quad\left(z=\frac{\eta x+\frac{u^2}{2}-1}{\tau}\right).$$

Последний интеграл можно считать равным нулю, если $u>\sqrt{2}$. Заменяя при $u<\sqrt{2}$ нижний предел на $-\infty$ $(\tau \ll 1)$, имеем

$$I_0(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\tau\eta}\left(1-\dfrac{u^2}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{6} \dfrac{\tau}{\eta}, & \text{если } u<\sqrt{2} \\ 0, & \text{если } u>\sqrt{2}.\end{cases}$$

Вычислим далее интеграл:

$$I_n(u)=\int_{0}^{\infty} \ln\left[1+e^{\frac{1}{\tau}\left(1-\eta x-\frac{u^2}{2}\right)}\right] \cos 2\pi n x\, dx=\frac{\eta}{4\pi^2 n^2 \tau} \frac{1}{e^{\frac{1}{\tau}\left(\frac{u^2}{2}-1\right)}+1}-$$

$$-\frac{\eta}{4\pi^2 n^2 \tau} Re\, e^{2\pi i n \frac{1-\frac{u^2}{2}}{\eta}} \int_{-\frac{1-\frac{u^2}{2}}{\tau}}^{\infty} \frac{e^z e^{2\pi i n \frac{\tau z}{\eta}}}{(e^z+1)^2} dz.$$

Полученный интеграл при $u>\sqrt{2}$ приближенно равен нулю. При $u<\sqrt{2}$ можно нижний предел заменить на $-\infty$. Интеграл с бесконечными пределами легко вычислить, он равен $\dfrac{2\pi^2 n \frac{\tau}{\eta}}{\operatorname{sh} 2\pi^2 n \frac{\tau}{\eta}}$; интегрирование по u дает при $\eta \ll 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(u)\, du=\frac{2\sqrt{2}\,\eta}{4\pi^2 n^2 \tau}-\frac{\sqrt{\eta}}{2n^{\frac{3}{2}}} \frac{\cos\left(\dfrac{2\pi n}{\eta}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sh} \dfrac{2\pi^2 n \tau}{\eta}}.$$

Окончательное выражение для Ω имеет вид *:

$$\Omega = -\left(\frac{\sqrt{m\varepsilon_0}}{\hbar}\right)^3 \frac{\varepsilon_0}{2\pi^2}\left(\frac{\sqrt{2}8}{15} + \frac{\sqrt{2}\tau^2}{3}\tau^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\eta^2 - \tau\eta^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{\eta} - \frac{\pi}{4}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\operatorname{sh}\frac{2\pi^2 n\tau}{\eta}}\right).$$

Эта формула справедлива при любом соотношении между τ и η, если только τ и $\eta \ll 1$.

Если $\eta \ll \tau$, то бесконечная сумма может быть отброшена.

Если $\eta \gg \tau$, то sh можно заменить его аргументом. Оставляя в выражении для M члены, пропорциональные η и $\eta^{\frac{1}{2}}$, получаем:

$$M = \left(\frac{\sqrt{m\varepsilon_0}}{\hbar}\right)^3 \frac{\mu}{2\pi^2}\left(\frac{\sqrt{2}\,\eta}{3} - \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{\eta} - \frac{\pi}{4}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

2. Квантование движения электрона приводит также к изменению сопротивления металла в магнитном поле, которое было определено Титейкой ([3]) для слабых ($\mu H \ll kT$) и очень сильных ($\mu H > \varepsilon_0$) полей.

Можно показать, что при низких температурах и полях, удовлетворяющих условию $\mu H \ll \varepsilon_0$, сопротивление весьма сложно зависит от поля, причем так же, как и для магнитного момента, в зависимости сопротивления от поля появляется характерная периодичность.

Общее выражение для сопротивления в поперечном поле имеет вид [([3]), (24)]:

$$\rho_t = \frac{m^2 D^2}{32\pi^3 w e^2 \hbar^2 \nu^2 \delta}\frac{\mu H}{kT}\sum_{n,n'}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} df'\, df_z \frac{f'^3 f}{f_z}\frac{W_{nn'}e^{\xi}}{(e^{\xi}-1)^2}\left(\frac{1}{e^{x-\frac{\xi}{2}}+1} - \frac{1}{e^{x+\frac{\xi}{2}}+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^{x'-\frac{\xi}{2}}+1} - \frac{1}{e^{x'+\frac{\xi}{2}}+1}\right), \qquad n, n' = 0, 1, 2, \ldots$$

где

$$x = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\mu H}{2}(n+n'+1) + \frac{\hbar^2 f_z^2}{8m} + \frac{m}{2f_z^2}[\omega - \omega_0(n'-n)]^2 - \varepsilon_0\right\},$$

$$x' = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\mu H}{2}(n+n'+1) + \frac{\hbar^2 f_z^2}{8m} + \frac{m}{2f_z^2}[\omega + \omega_0(n'-n)]^2 - \varepsilon_0\right\}, \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{kT};$$

$\omega = wf$ — частота фонона, w — скорость звука, f' — компонента f, перпендикулярная полю, ν — число электронов в см^3, δ — плотность, $\omega_0 = \frac{eH}{mc}$, $W_{nn'}$ — квадрат матричного элемента энергии возмущения электрона:

$$W_{nn'} = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau_x z}\Phi_n(z)\,\Phi_{n'}(z+\tau_y)\,dz\right|^2, \quad \vec{\tau} = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}\vec{f}\ **.$$

Рассмотрим тот случай, когда

$$H \gg \frac{c}{e\hbar}\left(\frac{kT}{w}\right)^2, \quad \mu H \ll \varepsilon_0,$$

при этом τ по порядку величины будет значительно меньше единицы $\left(f \text{ при низких температурах имеет порядок величины } \frac{kT}{\hbar w}\right)$. Мы можем

---

* Аналогичная формула для суммы Ω, определяющей магнитные свойства Bi, была получена ранее Ландау ([2]).

** $\Phi_n(z)$ — нормированная функция осциллятора.

поэтому разложить $W_{nn'}$ в ряд по степеням τ_x и τ_y и ограничиться нулевым членом, который дает: $W_{nn'}=\delta_{nn'}$. Далее в выражении для $x=x'$ можно пренебречь $\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2$.

Вводя вместо f_z и f' новые переменные f и $t=\frac{f^2}{f_z^2}$, перепишем ρ_t в виде

$$\rho_t = A\frac{\mu H}{kT}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^5 \int\limits_0^\infty \frac{\xi^4 e^\xi}{(e^\xi-1)^2}d\xi \int\limits_1^\infty \frac{t-1}{t^2}dt \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{kT}\left[\mu H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda t-\varepsilon_0-\frac{\hbar\omega}{2}\right]}+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}\left[\mu H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda t-\varepsilon_0+\frac{\hbar\omega}{2}\right]}+1}\right),$$

где

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{2}, \quad A=\frac{m^2D^2}{32\pi^3\omega e^2\hbar^2\nu^2\delta}.$$

Используя вновь формулу Пуассона и имея в виду, что сопротивление в отсутствие поля равно

$$\rho_0=\frac{5m^2D^2}{\pi^3\omega\delta e^2\hbar^2\nu^2}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{5}(^3),$$

получаем следующее выражение для ρ_t:

$$\rho_t=\frac{3}{4}\rho_0\left(\ln\frac{\varepsilon_0}{\lambda e}+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{4\pi^2 n\frac{kT}{\mu H}}{\operatorname{sh}\frac{2\pi^2 nkT}{\mu H}}A\left(\frac{\pi nkT}{\mu H}\right)L_t\left(\frac{2\pi n\varepsilon_0}{\mu H},\frac{2\pi n\lambda}{\mu H}\right)\right),$$

где

$$L_t(\alpha,\beta)=-\cos(\alpha-\beta)-(\cos\alpha-\beta\sin\alpha)Ci\beta+(\sin\alpha+\beta\cos\alpha)\left(\frac{\pi}{2}-Si\beta\right),$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{5!\,\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{\xi^4\sin\alpha\xi e^\xi}{(e^\xi-1)^2}d\xi.$$

Если $\frac{2\pi n\lambda}{\mu H}\gg 1$ и $T\to 0$, то отношение $\frac{\rho_t}{\rho_0}$ стремится к пределу *:

$$\left(\frac{\rho_t}{\rho_0}\right)_0\sim\frac{3}{4}\left(\ln\frac{\varepsilon_0}{e\lambda}-\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\mu H}{\lambda}\right)^2\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\cos\frac{2\pi n}{\mu H}(\varepsilon_0-\lambda)}{n^2}\right).$$

В случае продольного поля сопротивление равно

$$\rho_e=\frac{3}{2}\rho_0\left(1+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{4\pi^2 n\frac{kT}{\mu H}}{\operatorname{sh}\frac{2\pi^2 nkT}{\mu H}}A\left(\frac{\pi nkT}{\mu H}\right)L_e\left(\frac{2\pi n\varepsilon_0}{\mu H},\frac{2\pi n\lambda}{\mu H}\right)\right),$$

где

$$L_e(\alpha,\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\beta\sin\alpha\, Ci\beta-\left(\frac{\pi}{2}-Si\beta\right)\beta\cos\alpha.$$

Если $\beta\gg 1$, то $L_e(\alpha,\beta)\sim\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\beta}$.

Украинский физико-технический институт. Харьков.

Поступило 28 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ZS. f. Phys., **64**, 629 (1930). [2] Proc. Roy. Soc., **170**, 341 (1939). [3] Ann. Phys., **5**, 124 (1935).

* Этот случай имеет место для значений m, по порядку величины равных массе электрона.