Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Ю. С. ОЧАН

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ В-МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1939)

Во всем дальнейшем R будет обозначать некоторое полное метрическое пространство со счетной базой.

Два семейства множеств пространства R называются эквивалентными, если пространство допускает такое взаимно-однозначное преобразование самого на себя, при котором каждое множество первого семейства переходит в множество второго, и наоборот *.

E. Szpilrajn (1) установил ряд теорем относительно эквивалентности и неэквивалентности двух счетных семейств множеств. Например им показано, что существует для любого n такое счетное семейство проективных множеств класса n, которое не эквивалентно никакому счетному семейству проективных множеств низших классов. Отсюда в частности следует, что и семейство всех проективных множеств класса n не эквивалентно никакому семейству, состоящему исключительно из множеств низших классов. В этой заметке среди прочих результатов устанавливается аналогичное предложение для классов B-множеств: семейство всех B-множеств класса F^{ξ} (G^{ξ}) не эквивалентно никакому семейству, состоящему исключительно из B-множеств низших классов [относительно обозначений см. Hausdorff (2)]. В отличие от случая проективных множеств этот результат не может быть получен на основе рассмотрения счетных семейств множеств, так как E. Szpilrajn'ом доказано, что любое счетное семейство B-множеств эквивалентно некоторому семейству множеств, состоящему исключительно из множеств одновременно F_{σ} и G_{δ}.

Лемма. Пусть семейство $\mathfrak{M}$ подмножеств R таково, что каждое открытое множество пространства R входит в борелевское замыкание семейства $\mathfrak{M}$ **. Если $\mathfrak{M}$ эквивалентно семейству $\mathfrak{N}$, состоящему исключительно из B-множеств, то такая эквивалентность может быть осуществлена только при помощи отображения R самого на себя, заданного B-функцией.

---

* От взаимно однозначного отображения, о котором здесь идет речь, не требуется никаких свойств непрерывности, измеримости и т. д. Таким образом само понятие эквивалентности двух семейств подмножеств множества R принадлежит чистой теории множеств. Дальнейшие же результаты этой заметки существенно связаны с указанной выше топологической природой пространства R.

** Борелевским замыканием семейства множеств называется минимальное объемлющее его семейство, инвариантное по отношению к сложению множеств в конечном или счетном числе и к операции взятия дополнения (т. е. перехода от E к $R-E$).

Доказательство. Пусть $y=f(x)$ есть взаимно-однозначное отображение R самого на себя, преобразующее $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, и $x=f^{-1}(y)$ — обратное отображение. Пусть далее $G_1, G_2, \ldots G_n, \ldots$ — полная система окрестностей пространства, и $T_n=f(G_n)$. Так как G_n входят в борелевское замыкание $\mathfrak{M}$, то T_n входят в борелевское замыкание $\mathfrak{N}$, т. е. являются B-множествами. Обозначим α верхнюю грань классов множеств T_n. Каково бы ни было открытое множество G пространства R, его можно представить в виде $G=\sum_k G_{n_k}$. Следовательно множество $T=f(G)=f\left(\sum_k G_{n_k}\right)=\sum_k T_{n_k}$ будет B-множество класса не выше $\alpha+1$. Иначе говоря, при отображении $x=f^{-1}(y)$ прообразы открытых множеств будут B-множествами класса не выше $\alpha+1$. Это же и значит, что функция f^{-1} есть B-функция. В силу взаимной однозначности отображения $y=f(x)$ функция f также является B-функцией.

Определение. Семейство $\mathfrak{N}$ называется N-семейством, если оно обладает следующими свойствами:

1. Любое открытое множество пространства R входит в борелевское замыкание семейства $\mathfrak{N}$.

2. Любое компактное совершенное множество пространства R содержит в себе хотя бы одно множество из $\mathfrak{N}$.

Теорема 1. *N-семейство $\mathfrak{N}$, все множества которого обладают каким-либо топологически-инвариантным свойством K, не может быть эквивалентно никакому семейству $\mathfrak{M}$, состоящему исключительно из B-множеств, ни одно из которых не обладает свойством K.*

Доказательство. Если бы вопреки теореме взаимно-однозначное отображение $y=f(x)$ пространства R самого на себя переводило $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$, то в силу леммы функция f должна была бы быть B-функцией. Но по теореме Бэра можно найти такое, плотное в R, множество G_δ, на котором заданная B-функция непрерывна. Но тогда та же функция будет непрерывна и на компактном совершенном ядре P этого G_δ. Непрерывная и взаимно-однозначная функция на компактном множестве является взаимно-непрерывной, т. е. $f(P)=Q$ является гомеоморфизмом. По условию на P найдется множество R из $\mathfrak{N}$, обладающее свойством K. Множество $S=f(R)$ тоже обладало бы свойством K и входило бы в $\mathfrak{M}$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Говорят, что B-множество принадлежит строго классу F^ξ (G^ξ), если оно, являясь F^ξ (G^ξ), не является G^ξ (F^ξ)-множеством.

Говорят, что множество принадлежит жестко классу F^ξ (G^ξ), если его любая непустая порция * является множеством строго F^ξ (G^ξ). При $\xi \geqslant 2$ свойство быть строго F^ξ (G^ξ), равно как и жестко F^ξ (G^ξ), является топологически инвариантным. Это позволяет установить:

Следствие 1. При $\xi \geqslant 2$ семейство всех множеств жестко класса F^ξ (G^ξ) не эквивалентно никакому непересекающемуся с ним семейству B-множеств.

Доказательство. Для доказательства этого следствия достаточно установить, что совокупность всех множеств жестко класса F^ξ (соответственно G^ξ) образует N-семейство. Выполнение второго условия, налагаемого на N-семейство, очевидно. Что же касается первого условия, то, как легко видеть, при ξ четном (ξ нечетном) любое открытое мно-

* Порцией множества называется пересечение заданного множества с открытым множеством.

жество может быть представлено, как счетная сумма жестко F^ξ (соответственно жестко G^ξ), а при ξ нечетном (соответственно ξ четном) — даже как сумма двух множеств класса жестко G^ξ (соответственно жестко F^ξ).

Следствие 2. Семейство всех замкнутых компактных множеств не эквивалентно никакой совокупности B-множеств, ни одно из которых не является замкнутым компактным.

Следствие 3. Совокупность всех B-множеств

не выше I класса,
строго F^ξ ($\xi \geqslant 2$),
строго G^ξ ($\xi \geqslant 2$)

неэквивалентна никакой совокупности B-множеств, ни одно из которых не является соответственно множеством

замкнутым компактным,
жестко F^ξ ($\xi \geqslant 2$),
жестко G^ξ ($\xi \geqslant 2$).

В частности отсюда следует:

Следствие 4. При $\xi \geqslant 2$ семейство всех множеств F^ξ (G^ξ) не эквивалентно никакому семейству, состоящему исключительно из множеств G^ξ (F^ξ).

Следствие 4 оправдывает утверждение, сделанное в начале заметки.

Введем теперь понятие «уплотнения семейства». Семейство $\mathfrak{N}$ может быть уплотнено в свою часть $\mathfrak{M}$, если существует такое взаимно-однозначное преобразование пространства, которое переводит все семейство $\mathfrak{N}$ в его часть $\mathfrak{M}$.

Назовем далее максимальным N-семейством со свойством K систему-сумму всех N-семейств со свойством K. Для них мы будем иметь следующую теорему:

Теорема 2. *Если $\mathfrak{N}$ — максимальное N-семейство со свойством K, состоящее только из* B-*множеств, то оно не может быть уплотнено в такое свое подсемейство $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ образует N-семейство.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ переводится в $\mathfrak{M}$ с помощью функции $y = f(x)$. На основании леммы она должна быть B-функцией. Но тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ (тоже B-функция) переведет $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ — в некоторую совокупность B-множеств, ни одно из которых не обладает свойством K, что невозможно на основании теоремы 1, так как $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ является N-семейством со свойством K.

Следствия из этой теоремы в применении к отдельным максимальным N-семействам B-множеств очевидны.

Отметим еще, что непосредственно из леммы вытекает:

Следствие 5. Семейство всех B-множеств не эквивалентно никакой своей правильной части.

Из леммы и следствия 5 можно вывести:

Следствие 6. Семейство всех A-множеств (Суслинских множеств) не эквивалентно никакой своей правильной части.

Переходом к дополнениям выводится

Следствие 7. Семейство всех CA-множеств не эквивалентно никакой своей правильной части.

Институт математики
Московского государственного института.

Поступило
17 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Szpilrajn, Fundamenta math., **26**, p. 302—326 (1936). [2] F. Hausdorff, Mengenlehre.