Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. В. ГНЕДЕНКО

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 IV 1939)

Целью настоящей заметки является указание еще более простых, необходимых и достаточных условий для сходимости законов распределения сумм независимых слагаемых к предельному, чем указанные в моей предыдущей заметке ([1]). Упрощение достигается за счет некоторого изменения постановки вопроса.

Мы будем рассматривать в этой заметке, как и в предыдущей, последовательность серий

$$x_{n1},\ x_{n2}\ \ldots,\ x_{nk_n} \tag{1}$$

независимых в каждой серии случайных величин. Эти случайные величины называются предельно постоянными, если можно найти такие постоянные величины b_{nk}, что разности $x_{nk}-b_{nk}$ пренебрегаемы в пределе, т. е. равномерно относительно k $(1\leqslant k\leqslant k_n)$ выполняется при любом $\varepsilon>0$ соотношение

$$P\{|x_{nk}-b_{nk}|>\varepsilon\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Очевидно, что в качестве b_{nk}, если они вообще существуют, можно выбрать медианы величин x_{nk}, т. е. такие постоянные m_{nk}, что

$$P\{x_{nk}<m_{nk}\}\leqslant\frac{1}{2}\leqslant P\{x_{nk}\leqslant m_{nk}\}.$$

Обозначим закон распределения случайной величины x_{nk} через $F_{nk}(x)$, тогда для того, чтобы величины x_{nk} были предельно постоянны, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+m_{nk})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Мы будем искать необходимые и достаточные условия для того, чтобы можно было подобрать такие постоянные A_n, для которых законы распределения сумм

$$\sigma_n=x_{n1}+x_{n2}+\ \ldots\ +x_{nk_n}-A_n \tag{2}$$

сходятся к предельному (в каждой точке непрерывности последнего). Эти необходимые и достаточные условия найдены мною в двух формах:

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы можно было подобрать постоянные A_n так, чтобы законы распределения сумм (2) независимых предельно* *постоянных случайных величин сходились к предельному, необходимо и достаточно существование такой функции $G(u)$ $(G(-\infty)=0)$, что:*

1. $$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x+\alpha_{nk})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}G(u)$$

в точках непрерывности $G(u)$;

2. $$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x+\alpha_{nk})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}G(+\infty),$$

где

$$\alpha_{nk}=m_{nk}+\int_{|x|<1}xdF_{nk}(x+m_{nk}).$$

Примечание: Если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\int_{|x|<\varepsilon}xdF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2=0, \tag{3}$$

то α_{nk} в теореме 1 можно выбрать равными медианам $(\alpha_{nk}=m_{nk})$. Если предельный закон не имеет гауссовой компоненты [т. е. если

$$G(+0)-G(-0)=0]$$

или если закон $F_{nk}(x)$ симметричен относительно медиан, то соотношение (3) выполняется.

Теорема 2. *Для того, чтобы можно было подобрать постоянные A_n так, чтобы законы распределения сумм (2) независимых предельно постоянных случайных величин сходились к предельному, необходимо и достаточно существование таких функций $M(u)$* [для $u<0$; $M(-\infty)=0$] и $N(u)$ [для $u>0$; $N(+\infty)=0$] *и постоянного a, что:*

1. *В точках непрерывности функций $M(u)$ и $N(u)$*

$$\sum_{k=1}^{k_n}F_{nk}(u+m_{nk})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}M(u)\quad \text{для } u<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}[F_{nk}(u+m_{nk})-1]\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}N(u)\quad \text{для } u>0.$$

2. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2dF_{nk}(x+m_{nk})-\Big(\int_{|x|<\varepsilon}xdF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2\Big\}=a^2.$$

Постоянные A_n можно выбрать равными

$$A_n=\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{m_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dF_{nk}(x+m_{nk})\Big\}.$$

Логарифм характеристической функции предельного закона дается формулой П. Леви

$$\lg\varphi(t)=-\frac{a^2}{2}t^2+\int_{-\infty}^{-0}\Big(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\Big)dM(u)+$$
$$+\int_{+0}^{\infty}\Big(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\Big)dN(u).$$

В качестве следствия из данных здесь теорем приведем наиболее общую форму закона больших чисел для сумм независимых слагаемых.

Теорема 3. *Для того, чтобы существовали такие постоянные* A_n, *что при любом* $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}-A_n| \geqslant \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+m_{nk}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Заметим, что если предположить, что величины x_{nk} пренебрегаемы в пределе, то всюду в формулировках теорем 1—3 можно заменить величины α_{nk} на $\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_{nk}(x)$, где τ — любое постоянное число. Таким образом мы попутно получаем теоремы, изложенные в моих предыдущих заметках ([1], [2]).

Относительно доказательств теорем 1—3 заметим следующее. Если при каком-либо выборе констант A_n законы распределения сумм (2) сходятся к предельному, то всегда выполняются следующие два условия:

1. Существует независящее от n постоянное C, для которого

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+m_{nk}) < C.$$

2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от n число $l(\varepsilon)$ такое, что при некоторых $x=x(n)$

$$F_n[x+l(\varepsilon)]-F_n(x) \geqslant 1-\varepsilon.$$

Здесь через $F_n(x)$ обозначен закон распределения суммы

$$S_n = x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}. \tag{4}$$

Это позволяет использовать следующую лемму:

Лемма 1. При соблюдении условий (1) и (2) законы распределения $F_n(x)$ сумм (4) и безгранично-делимые законы $\Phi_n(x)$, логарифмы $\Psi_n(t)$ характеристических функций которых определяются по формуле

$$\Psi_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{ im_{nk}t+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\,dF_{nk}\left(x+m_{nk}+\int\limits_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x+m_{nk})\right)\right\},$$

в которой ε — любое положительное постоянное число, обладают тем свойством, что их разность $F_n(x)-\Phi_n(x)$ при $n\to\infty$ сходится по мере к нулю.

Эта лемма является обобщением известной теоремы Г. М. Бавли ([3]); она показывает, что суммы (4) при увеличении числа слагаемых с любой степенью точности могут быть апроксимированы суммами безгранично-делимых случайных величин.

Из леммы 1 получаем:

Лемма 2. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных A_n законы распределения сумм (2) независимых предельно постоянных случайных величин сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы к предельному сходились безгранично-делимые законы распределения, логарифмы характеристических функций которых определяются формулой

$$\lg \varphi_n(t) = -iA_n t + \sum_{k=1}^{k_n} \Big\{ i m_{nk} t +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}\Big(x + m_{nk} + \int_{|x|<1} x dF_{nk}(x + m_{nk})\Big)\Big\}.$$

Предельные законы для обеих последовательностей совпадают.

Лемма 2 вместе с теоремой 2 моей прежней заметки (²) и приводит к желаемому результату.

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
3 V 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, ДАН, XXII, № 2, 61—64 (1939). [2] Б. В. Гнеденко, ДАН, XVIII, № 4—5, 231—234 (1938). [3] Г. М. Бавли, Математический сборник, **1** (**43**), 917—930 (1936).