Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. А. ФУКС

О ПСЕВДОКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБЛАСТИ НА СЕБЯ С ФИКСПУНКТОМ НА ГРАНИЦЕ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 29 IV 1939)

1. Пусть D—однолистная область пространства двух комплексных переменных z^1, z^2. Тогда в этой области согласно С. Бергману может быть определена так называемая ядровая функция:

$$K(z, \bar{z}) = K(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2) = \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z^1, z^2)|^2. \tag{1}$$

Здесь φ_k образуют в D ортогональную, нормированную, полную (для регулярных в D функций f с $\int\limits_D |f|^2 d\omega < \infty$, $d\omega$—элемент объема) систему функций. $K(z, \bar{z})$ может быть также определена с помощью некоторой минимальной задачи, чем устанавливается, что она зависит только от области D. С помощью $K(z, \bar{z})$ в D определяется риманова метрика, инвариантная при псевдоконформных отображениях области D ([1]):

$$ds^2 = T_{m\bar{k}}\, dz^m d\bar{z}^k; \quad T_{m\bar{k}} = \frac{\partial^2 \lg K}{\partial z^m \partial \bar{z}^k} \tag{2}$$

[(2) положительная эрмитова форма; под псевдоконформным отображением $z^{*k} = f^k(z^1, z^2)$ понимается взаимнооднозначное отображение области D через пару аналитических функций].

Пусть ([2], [3])

$$u^k(z, \bar{t}) = T_{(t)}^{k\bar{r}} \frac{\partial \lg M(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}^r} = \frac{L^k(z, \bar{t})}{K(z, \bar{t})} \tag{3}$$

так называемые репрезентативные координаты области D относительно точки t (t^1, t^2). Здесь $M(z, \bar{t}) = \frac{K(z, \bar{t})}{K(t, \bar{t})}$—так называемая минимальная функция D ([1]). Индекс (t) здесь и далее указывает, что соответствующая величина вычислена в точке t. Пусть

$$\delta z^k = \xi^k(z^1, z^2)\, \delta p \tag{4}$$

б. м. преобразование группы аналитических движений инвариантной геометрии ([2]). К числу этих движений принадлежат все псевдоконформные отображения области D на себя.

Как мной установлено [4] ранее, функции ξ^k могут быть всегда представлены так [точку $P(t^1, t^2)$, фигурирующую в цитируемой работе, мы заменяем точкой t]:

$$\xi^r(z) = \xi^s(t)\,\tau^{r\bar{e}}\,T_{s\bar{e}} - \overline{\xi^s(t)}\,\tau^{r\bar{e}}\frac{\partial^2 \lg M(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}^s\,\partial \bar{t}^e} - \frac{\partial \overline{\xi^s(t)}}{\partial \bar{t}^e}\,\tau^{r\bar{e}}\frac{\partial \lg M(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}^s}. \qquad (5)$$

Исходя отсюда, мы можем, пользуясь (3), (4), а также равенством (4) (записанным для точки t) только что цитированной работы, написать:

$$\delta\,[u^s(z,\bar{t})] = \xi^s(t)\,\delta p + \xi^s{}_{,r}(t)\,u^r(z,\bar{t})\,\delta p - \overline{\xi^r(t)}\,\frac{\partial u^s(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}^r}\,\delta p. \qquad (6)$$

Здесь $\xi^s{}_{,r}$; $u^s{}_{,\bar{r}}$ — ковариантные производные соответствующих величин в точке t. Заметим, что в метрике (2)

$$u^s{}_{,\bar{r}} = \frac{\partial u^s(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}^r}.$$

Пусть далее E — некоторая последовательность точек $t_i(t_i^1, t_i^2)$ области D, сходящаяся к некоторой граничной точке $G(t^1, t^2)$ области D. Мы условимся называть величины α, β_k относительным порядком величин $K(z,\bar{t})$, $L^k(z,\bar{t})$ на последовательности E, если существуют в D и достигаются равномерно во всякой области D_1 (область D_1 вместе со своей границей целиком лежит в D) отличные от тождественного нуля пределы:

$$\lim_{i\to\infty}[K(t_i,\bar{t}_i)]^{-\alpha} K(z,\bar{t});\quad \lim_{i\to\infty}[T^{k\bar{k}}_{(t_i)} K(t_i,\bar{t}_i)]^{\beta_k} L^k(z,\bar{t}). \qquad (7)$$

Относительно этих определений заметим, что если величины $K(t_i,\bar{t}_i)$; $T^{k\bar{k}}(t_i,\bar{t}_i)$. $K(t_i,\bar{t}_i)$ стремятся к ∞, то всегда $\alpha, \beta_k \leqslant \frac{1}{2}$. Это следует из неравенств

$$\begin{aligned} |K(z,\bar{t})|^2 &\leqslant K(z,\bar{z})\cdot K(t,\bar{t}),\\ |L^k(z,\bar{t})|^2 &\leqslant K(z,\bar{z})\cdot K(t,\bar{t})\,T^{k\bar{k}}(t,\bar{t}), \end{aligned} \qquad (8)$$

получаемых применением неравенства Шварца к выражениям (1) и (3).

В случае областей, для которых поведение ядровой функции на границе области изучено С. Бергманом [1] (при этом еще должны быть сделаны некоторые предположения о последовательности E), в выражении (7) $T^{k\bar{k}}K$ может быть заменено некоторой степенью K. В этих случаях $\lim\limits_{i\to\infty} K(t_i,\bar{t}_i) = \infty$. Заметим наконец, что если D — гипершар или бицилиндр, то $\alpha = \beta_k = 0$.

2. Пусть для составляющих $\xi^k(z)$ б. м. преобразования группы аналитических движений области D существует такая последовательность E точек $t_i(t_i^1, t_i^2)$, сходящихся к граничной точке G, что $\lim\limits_{i\to\infty} \xi^k(t_i) = 0$.

Это очевидно выполняется, если $\xi^k(z)$ регулярны и равны нулю в точке G [последнее например имеет место для б. м. преобразования некоторой непрерывной группы псевдоконформных отображений области D на себя, преобразования которой регулярны в граничной точке G и имеют ее своим фикспунктом]. В этом случае может быть доказана следующая теорема:

Теорема.

$$\delta z^k = \xi^k(z^1, z^2)\,\delta p$$

б. м. преобразования группы аналитических движений пространства, для которых $\lim\limits_{i\to\infty} \xi^k(t_i^1, t_i^2) = 0$ [$E(t_i^1, t_i^2)$ — *некоторая последовательность точек* t_i *области* D *сходятся в граничной точке* G].

Тогда, если выполняются условия:

(A) *существуют порядки* α, β_k *величин* $K(z,\bar{t})$ *и* $L^k(z,\bar{t})$ *на* E;

(B) *существует*

$$\lim_{i\to\infty} \xi^s,_r \frac{(KT^{ss})^{-\beta_s}}{(KT^{rr})^{-\beta_r}} = \alpha_r^s, \quad (\alpha_r^s \neq 0);$$

(C) *существуют и равны нулю пределы*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{[T^{s\bar{s}}K]^{-\beta_s}}{K^{-\alpha}} \xi^s(t_i), \; \lim_{i\to\infty} \frac{[T^{k\bar{k}}K]^{-\beta_k}}{K^{\alpha-1}} \cdot S_{sk}^{\frac{1}{2}} \cdot \xi^s(t_i) \, *,$$

то существуют функции

$$v^s = \lim_{i\to\infty} \frac{[T^{s\bar{s}}K]^{-\beta_s}}{K^{-\alpha}} u^s(z, \bar{t}_i) = F^s(z^1, z^2).$$

Они определяют некоторое аналитическое отображение с отличным от тождественного нуля определителем области D на некоторую область R. *В этой области преобразованиям группы аналитических движений, порождаемой б. м. преобразованиями $\delta z^k = \xi^k \delta p$, отвечают линейные, однородные отображения области* R *на себя.*

Здесь

$$S_{sk} = T^{k\bar{l}}\, T^{m\bar{k}} \Big[(KK_{ml s\bar{s}} - K_{\bar{l}} K_{\bar{s}sm} - K_m K_{s\bar{s}\bar{l}} + K_{s\bar{s}} K_{m\bar{l}}) -$$
$$- \frac{1}{K^2} (KK_{sm} - K_s K_m)(KK_{\bar{s}\bar{l}} - K_{\bar{s}} K_{\bar{l}}) - K^2 T^{p\bar{q}} \frac{\partial T_{p\bar{l}}}{\partial t^{\bar{s}}} \frac{\partial T_{m\bar{q}}}{\partial t^s} -$$
$$- K \left(K_s \frac{\partial T_{m\bar{l}}}{\partial t^{\bar{s}}} + K_{\bar{s}} \frac{\partial T_{m\bar{l}}}{\partial t^s} \right) \Big].$$

Доказательство этой теоремы основывается на соотношении (6) При ее формулировке мы не делаем никаких предположений относительно характера границы области и расположения последовательности E относительно этой границы.

Если рассмотреть случаи, изученные Бергманом в его работах, посвященных исследованию поведения кернфункции на границе области ([1]), то мы придем к следующим результатам (мы сохраняем терминологию и обозначения цитируемой работы):

1) В случае, если для последовательности E и области D выполняются условия «приближения A^{I}» к точке 3-го порядка (каковой должна быть точка G), то условия (B) и (C) нашей теоремы могут быть заменены условием существования $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\partial \xi^s(t_i)}{\partial t_i^l} \frac{(KT^{s\bar{s}})^{-\beta_s}}{(KT^{l\bar{l}})^{-\beta_l}}$ и требованием, чтобы порядок стремления $\xi^s(t_i)$ к нулю был не ниже, чем величины $\rho^{\frac{3}{2}}$ (ρ — проекция Gt_i на внутреннюю нормаль к граничной гиперповерхности в точке G).

2) В случае, если для последовательности E и области D выполняются условия «приближения A^{V}» к точке 2-го порядка (каковой должна быть точка G), то условия (B) и (C) нашей теоремы могут быть заменены условием существования $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\partial \xi^s(t_i)}{\partial t_i^l} \frac{(KT^{s\bar{s}})^{-\beta_s}}{(KT^{l\bar{l}})^{-\beta_l}}$ и требованием, чтобы порядок стремления $\xi^s(t_i)$ к нулю был не ниже, чем ρ^2 (ρ имеет прежний смысл).

Воронежский государственный университет.

Поступило 29 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bergmann, Crelles Journal, **169**, 1—40 (1932); ibid., **172**, 89—128 (1934). [2] S. Bergmann, Math. Annalen, 102 (1930). [3] Б. Фукс, Математ. сборник, **2 (44)**, 567—594 (1937). [4] Б. Фукс, Известия н.-и. ин-та математики и механики при Томском ун-те, **1**, вып. 3, стр. 281—285 (1937).

---

* Здесь суммирование по индексам s, k не производится.