Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

О ПРОЕКЦИЯХ НЕКОТОРЫХ B-МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 IV 1939)

Kunugui доказал следующую теорему (¹):

Если ε есть плоское $G\delta$, то множество точек x_0, таких, что прямые $x=x_0$ пересекают ε по множеству замкнутому, есть всегда CA-множество.

Из этой теоремы следует, что проекция плоского $G\delta$, пересекающегося с каждой прямой, параллельной оси OY по множествам замкнутым, есть всегда B-множество.

Мы докажем следующую теорему, являющуюся обобщением цитированной:

Теорема. *Если ε есть плоское B-множество, то множество точек x_0, таких, что прямая $x=x_0$ пересекает ε по множествам замкнутым, есть всегда CA-множество.*

Мы будем опираться на следующую лемму:

Лемма. Если ε есть плоское B-множество, то множество точек, принадлежащих ε и лежащих на прямых $x=x_0$, пересекающих ε по замкнутым множествам, есть всегда CA-множество.

Доказательство. Пусть $\bar{\varepsilon}$ есть замыкание множества ε вдоль прямых, параллельных оси OY. Известно, что $\bar{\varepsilon}$ есть A-множество (²). Пусть W есть проекция множества $\bar{\varepsilon}-\varepsilon$ на ось OX и S есть совокупность точек плоскости OXY, проекции которых принадлежат CW. Ясно, что S есть CA-множество. Поэтому $P=S\cdot\varepsilon$ есть также CA-множество. Легко видеть, что p является множеством, о котором идет речь в лемме.

Доказательство теоремы:

Не ограничивая общности, можно предполагать, что плоское B-множество расположено в единичном квадрате плоскости OXY. Обозначим I_{nk} замкнутую полосу квадрата $\frac{k-1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{k}{n}$. Пусть Q_{nk} есть проекция $I_{nk}\cdot\varepsilon$ на ось OX, а E_{nk} — совокупность всех тех точек множества I_{nk}, абсциссы которых принадлежат Q_{nk}.

Положим $E_n=\sum\limits_{k=1}^{n}E_{nk}$.

Очевидно все E_{nk} и E суть A-множества.

Обозначим через E множество $\prod\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

Рассмотрим множества $E_n - E$. Согласно обобщенной второй теореме о кратной отделимости (³) существует счетная система CA-множеств $H_1, H_2, H_n, \ldots$ таких, что $H_n \supset E_n - E$ и $\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0$.

Пусть U_{nk} будет множество всех тех точек I_{nk}, которые принадлежат прямым, целиком погруженным во множество $H_n + P$ в полосе I_{nk}. Очевидно все U_{nk} суть CA-множества так же, как и множества $U_n = \sum_{k=1}^{n} U_{nk}$.

Так как $H_n + P \supset U_n$, $U_n \supset P$ и $\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0$, то $\prod_{n=1}^{\infty} U_n = P$.

Рассмотрим множества $\overline{U}_n = U_1 \cdot U_2 \ldots U_n$, каждое из множеств U_n пересекается параллелями к оси OY по конечному числу сегментов и $\overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \ldots \overline{U}_n \supset \ldots$, следовательно проекция пересечения $\overline{U}_n$ на ось OX совпадает с пересечением проекций этих множеств на ось OX. Однако последние являются CA-множествами, и следовательно проекция $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = P$ на ось OX есть CA-множество.

Следствие 1. Проекция на ось OX плоского B-множества, пересекающегося с прямыми, параллельными оси OY по множествам замкнутым, есть B-множество.

Следствие 2. Семейство плоских B-множеств, пересекающихся с прямыми, параллельными оси OY по замкнутым множествам, совпадает с семейством замыканий вдоль параллелей оси OY счетных систем B-кривых.

Поступило
28 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Kunugui Kinjiro, Proc. Imp. Acad. Jap., **13**, 287—291 (1937). [2] П. С. Новиков, ДАН, III, № 1 (1934). [3] П. С. Новиков, ДАН, IV, № 1—2 (1934).