Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАРЛЕМАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 IV 1939)

1. Постановка задачи. Пусть в плоскости комплексного переменного z нам дан континуум E, содержащий бесконечно удаленную точку $z=\infty$. Мы скажем, что континуум E есть континуум Карлемана, если, какова бы ни была функция $f(z)$, определенная и непрерывная на E $(z<\infty)$, и какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(r)$, $r\geqslant 0$, можно найти целую функцию $F(z)$ такую, что

$$|f(z)-F(z)|<\varepsilon(|z|). \tag{1}$$

Карлеман [1] показал, что действительная ось является континуумом Карлемана, им же было показано, что вместо прямой можно взять любую конечную систему спрямляемых кривых Жордана без кратных точек, содержащих точку ∞ и не имеющих попарно общих точек в конечной части плоскости.

А. Рот [2] показала, что нигде не плотный континуум, образованный лучами $\arg z=\mathrm{const}$, $|z|\geqslant k\geqslant 0$, есть всегда континуум Карлемана.

В настоящей заметке мы имеем в виду дать необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять континуум E для того, чтобы он был континуумом Карлемана.

2. Теорема. *Для того, чтобы данный континуум E был континуумом Карлемана, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *E нигде не было плотно,*

2) *существует возрастающая функция $r(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)=\infty$ такая, что, какова бы ни была точка z, расположенная вне E, всегда найдется кривая Жордана, выходящая из точки z, уходящая в ∞ и расположенная вне E и вне круга $|\zeta|<r(|z|)$.*

3. Необходимость условия. Необходимость первого условия очевидна. Допустим теперь, что нигде не плотный континуум E_0 не удовлетворяет условию 2). В таком случае дополнение к E_0, CE_0 не связно, и одна из областей D, составляющих это дополнение, ограничена, или существует число $r_0>0$ и последовательность точек $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ такие, что всякая линия, соединяющая точку z_k с точкой $z=\infty$ и расположенная вне E_0, будет пересекать окружность $|z|=r_0$. В первом случае обозначим через z_0 произвольную точку области D и положим

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0};$$

при $\varepsilon(r)$ достаточно малом не существует целой функции $F(z)$, удовлетворяющей на границе области D неравенству (1). Следовательно

E_0 не может быть континуумом Карлемана. Во втором случае обозначим через D_n наибольшую область, содержащую точку z_n и расположенную вне E_0 и вне круга $|z| \leqslant r_0$. Согласно принятому условию все области D_n конечны. Выбирая из последовательности $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ некоторую подпоследовательность, мы можем всегда добиться того, чтобы все области D_n были попарно без общих точек и чтобы граничные точки ζ_n области D_n, наиболее удаленные от начала $z = 0$, удовлетворяли неравенству $|\zeta_{n+1}| > 2|\zeta_n| > 3r_0$. Заметив это, фиксируем в каждой области D_n точку a_n, $|a_n| = 2r_0$, а на границе D_n множество l_n точек, расположенных в круге $|z - \zeta_n| \leqslant r_0$. Отобразим конформно область D_n на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка a_n перешла в точку $w = 0$, и обозначим через λ_n меру множества точек окружности $|w| = 1$, соответствующих множеству l_n. Рассмотрим теперь на E_0 произвольную действительную непрерывную функцию $f(z)$, обладающую следующими свойствами: 1) $f(z) > 0$ и 2) $f(z) > \frac{2\pi n}{\lambda_n}$ в точках множества l_n. Нетрудно видеть, что при ограниченной функции $\varepsilon(r)$ не существует целой функции $F(z)$, удовлетворяющей (1). В самом деле, допустим, что такая функция существует, и обозначим через $P(z)$ ее действительную часть. Имеем

$$|f(z) - P(z)| < C = \text{const}$$

во всех точках E_0. Отсюда, обозначая через m минимальное значение $P(z)$ при $|z| = r_0$, получим

$$P(a_n) > n - C + m \quad n = 1, 2, \ldots,$$

что невозможно, ибо при $|z| = |a_n| = 2r_0$ функция $P(z)$ ограничена.

Достаточность условия. Допустим теперь, что континуум E удовлетворяет условиям теоремы, фиксируем произвольное число R, и пусть E_R есть совокупность точек E, принадлежащих кругу $|z| \leqslant R^{(1)}$, где $R^{(1)}$ есть корень уравнения $r(R^{(1)}) = 2R$. Обозначим через D_R наибольшую связную область, содержащую точку $z = \infty$ и не содержащую точек E_R и точек круга $|z| < r = r\left(\frac{1}{2}R\right)$. Пусть E_R^* есть множество, дополнительное к области D_R. Множество E_R^* содержит множество E_R, а также круг $|z| \leqslant r$, кроме того, в силу условия 2) теоремы, на окружности $|z| = \rho$, $\frac{1}{2}R < \rho$ множества E_R и E_R^* совпадают. Следовательно, так как E_R нигде не плотно, всегда найдется число $\rho_0 < R$, сколь угодно близкое к R и такое, что совокупность точек E_R^*, расположенных на $|z| = \rho_0$, будет нигде не плотно на этой окружности. Отсюда, согласно одной лемме М. Лаврентьева ([3]), каково бы ни было число ν, существует полином $\pi(r, R, \nu)$, обладающий следующими свойствами:

1. $|\pi(z, R, \nu)| < 2$ во всех точках E_R^*.
2. $|\pi(z, R, \nu)| < \nu$ во всех точках E_R^* при $|z| \leqslant \frac{R}{2}$.
3. $|\pi(z, R, \nu) - 1| < \nu$ во всех точках E_R^* при $|z| \geqslant R$.

Докажем теперь, что рассматриваемый континуум есть континуум Карлемана. Для этой цели возьмем произвольную функцию $f(z)$, заданную и непрерывную на E, а также произвольную положительную функцию $\varepsilon(r)$ и докажем существование целой функции $F(z)$, удовлетворяющей (1). Не нарушая общности, мы можем очевидно принять, что $\varepsilon(r)$ убывает и стремится к нулю вместе с $\frac{1}{r}$.

Построим прежде всего, согласно одной теореме М. А. Лаврентьева, полином $P(z)$ такой, что

$$|f(z) - P_0(z)| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon(R_0), \; R_0 > 0$$

во всех точках E, принадлежащих кругу $|z| \leqslant R_0$. Согласно той же теореме существует полином $P_1^{(1)}(z)$ такой, что

$$|f(z) - P_0(z) - P_1^{(1)}(z)| < \frac{1}{4}\varepsilon(R_1), \quad r(R_1) = 2R_0$$

во всех точках множества E_{R_0}. Положим $P_1(z) = P_1^{(1)}(z) \cdot \pi(z, R_0, \nu_1)$, где число ν_1 выбираем настолько малым, чтобы при $|z| \leqslant r_0 = r(R_0)$ имели

$$|P_1(z)| < \frac{1}{2}$$

во всех точках E_R; при $|z| < R_0$ имеем

$$|f(z) - P_0(z) - P_1(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon(R_0),$$

а во всех точках E_R при $|z| \geqslant R_0$ имеем

$$|f(z) - P_0(z) - P_1(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon(R_1).$$

Следуя индукции, допустим, что мы определили числа $R_0, R_1, \dots R_n$ и полиномы $P_0(z), P_1(z), \dots P_n(z)$ так, что

$$|P_n(z)| < \frac{1}{2^n} \text{ при } |z| < r_{n-1} = r(R_{n-1}) \tag{2}$$

$$|f(z) - P_0(z) - P_1(z) - \dots - P_n(z)| < \frac{\varepsilon(R_k)}{2^n}, \text{ при } R_{k-1} < |z| < R_k \tag{3}$$

$$k = 0, 1, \dots n, \quad R_{-1} = 0$$

определим число R_{n+1} и $P_{n+1}(z)$. Положим

$$r(R_{n+1}) = 2R_n.$$

Полином $P_{n+1}^{(1)}(z)$ построим так, чтобы во всех точках множества E_{R_n} имели

$$|f(z) - P_0(z) - \dots - P_{n+1}^{(1)}(z)| < \frac{1}{2^{n+2}}\varepsilon(R_{n+1}).$$

Искомый полином $P_{n+1}(z)$ получим умножением полинома $P_{n+1}^{(1)}$ на полином π:

$$P_{n+1}(z) = P_{n+1}^{(1)}(z) \cdot \pi(z, R_n, \nu_{n+1});$$

число ν_{n+1} выбираем настолько малым, чтобы построенный полином $P_{n+1}(z)$ обладал свойством (2) и (3) (очевидно, при соответствующей замене n на $n+1$).

Таким образом мы получаем последовательность полиномов $P_0(z)$, $P_1(z), \dots P_{n+1}(z), \dots$ В силу (2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$, составленный из этих полиномов, сходится и равномерно во всякой конечной части плоскости, и следовательно его сумма есть целая функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z).$$

Кроме того по построению в каждой точке E имеем

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon(|z|).$$

Этим самым теорема полностью доказана.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
13 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Arkiv för Matematik, Astronomi, och Fisik, **20 B**, № 4 (1927). [2] A. Roth, Commentarii Matematici Helvetici, **10**, 11 (1938). [3] M. Lavrentieff, Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes. Actualités Scient. et industr., 441 (1936).