Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ

В моей работе * доказано следующее предложение:

1. Если в точке x_σ спрямляемый контур L имеет определенную касательную, суммируемая функция $f(x)$ в этой точке x_σ непрерывна и особый интеграл (главное значение Коши) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_\sigma}$ существует, то имеет место формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z} \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_\sigma} \pm \frac{1}{2} f(x_\sigma), \tag{I}$$

где точка z стремится к точке x_σ по любому некасательному пути (знак $+$, когда z стремится изнутри L, и знак $-$ в случае внешней точки z).

Отметим теперь легко устанавливаемое предложение:

2. Если L есть спрямляемый контур, имеющий определенную касательную в каждой его точке, за исключением, быть может, конечного числа точек, а $F(z)$—функция, голоморфная и проективно-ограниченная внутри контура L (или вне L), стремящаяся по нормалям к предельным значениям $F(x)$, образующим непрерывную функцию на L с устранимыми точками разрыва в исключительных точках, то это стремление будет иметь место для всех путей, как некасательных, так и касательных к контуру L во всех его точках. Действительно, обозначим через D область внутри контура L (или вне L) и предположим сначала $F(z)$ ограниченной функцией в области D. Отображая конформно область D на единичный круг плоскости ζ, обозначим через $\Phi(\zeta)$ преобразованную функцию, которая, будучи голоморфной и ограниченной внутри круга $|\zeta|<1$ в каждой точке ξ окружности $|\xi|=1$, кроме конечного числа исключительных точек, будет иметь предельное значение $\Phi(\xi)$ по некоторому пути, ортогональному к окружности, причем $\Phi(\xi)$—непрерывная функция на окружности $|\xi|=1$ с устранимыми точками разрыва в исключительных точках. В этом случае функция $\Phi(\zeta)$ представима интегралом Коши $\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\Phi(\xi)\,d\xi}{\xi-\zeta}$ или, что то же, интегралом Пуассона $\Phi(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta$; следовательно $\Phi(\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$, а значит, $F(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, т. е. $F(z)$ стремится к пределу $F(x)$, когда $z\longrightarrow x$ любым образом.

Очевидно случай проективно-ограниченной функции линейным преобразованием сводится на рассмотренный случай ограниченной функции.

---

* И. И. Привалов, Интеграл Коши, Изв. сар. ун-та, стр. 63—64 (1918).

Предположим теперь, что L есть кусочно-гладкий контур, т. е. составлен из конечного числа дуг с непрерывной касательной. Под углом контура в точке M будем понимать угол, на который поворачивается в точке M касательный вектор при положительном движении точки по кривой L, и будем его величину обозначать через $\pi\theta$, где $-1<\theta<+1$. Таким образом в точке контура, где существует определенная касательная, $\theta=0$, в угловой же точке θ отлично от нуля.

Случаи точек заострения $(\theta=\pm 1)$ исключаются.

Из теоремы 1, пользуясь предложением 2, установим теорему:

3. Если контур L есть кусочно-гладкий без точек заострения и функция $f(x)$, заданная на L, удовлетворяет условию Липшитца

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|^{\alpha}, \quad (0<\alpha\leqslant 1), \tag{1}$$

то имеет место формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z} \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_\sigma} \pm \frac{1\mp\theta}{2} f(x_\sigma), \tag{II}$$

где точка z стремится к произвольной точке x_σ контура по любому пути (верхние знаки—для случая изнутри L, нижние—в случае внешней точки z).

В самом деле, замечая, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dx}{x-x_\sigma}=\frac{1+\theta}{2}$, перепишем правую часть формулы (II) в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_\sigma} \pm \frac{1\mp\theta}{2} f(x_\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)-f(x_\sigma)}{x-x_\sigma}\,dx + \frac{1+\theta}{2} f(x_\sigma) \pm \frac{1\mp\theta}{2} f(x_\sigma). \tag{2}$$

Т. обр. правая часть формулы (II) может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)-f(x_\sigma)}{x-x_\sigma}\,dx + f(x_\sigma) \tag{3}$$

либо в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)-f(x_\sigma)}{x-x_\sigma}\,dx. \tag{4}$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшитца, то формулы (3) и (4), как легко видеть, представляют непрерывные функции точки x_σ всюду на L. С другой стороны, согласно теореме 1 правая часть формулы (II) представляет предельные значения интеграла типа Коши по нормалям (изнутри L или извне L) во всех неугловых точках, причем, как только что было отмечено, эти предельные значения непрерывны на всем контуре, включая угловые точки. Применяя предложение 2, мы убедимся в справедливости теоремы 3 после того, как исследуем интеграл типа Коши с точки зрения его проективной ограниченности*. С этой целью, полагая $x-z=re^{i\chi}$, будем иметь: $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_1(s)\,e^{i(\varphi-\chi)}\,ds}{r}$; где

$$f_1(s)=f[x(s)].$$

В последнем выражении отделим действительную часть от мнимой; подставляя $\mu(s)+i\nu(s)$ вместо $f_1(s)$, получим:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(s)\cos(\varphi-\chi)}{r}\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\mu(s)\sin(\varphi-\chi)}{r}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\nu(s)\cos(\varphi-\chi)}{r}\,ds-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\nu(s)\sin(\varphi-\chi)}{r}\,ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left[P_1(x,y)+iQ_1(x,y)+i\left(P_2(x,y)+iQ_2(x,y)\right)\right], \tag{5}$$

* L. c., стр. 70.

где положено:

$$P_1(x,y)=\int_L \frac{\mu(s)\cos(\varphi-\chi)}{r}\,ds=\int_L \mu(s)\frac{\sin(n,r)}{r}\,ds,$$

$$Q_1(x,y)=\int_L \frac{\mu(s)\sin(\varphi-\chi)}{r}\,ds=\int_L \mu(s)\frac{\cos(n,r)}{r}\,ds$$

и аналогично P_2 и Q_2 с заменой $\mu(s)$ на $\nu(s)$, где (n, r) есть угол между внутренней нормалью в точке s и вектором $\overline{r}$, идущим из точки s к точке z, взятый с надлежащим знаком. Так как $Q_1(x, y)$ как потенциал двойного слоя представляет ограниченную гармоническую функцию внутри контура L (или вне L), то функция $P_1(x, y)+iQ_1(x, y)$ будет голоморфной и проективно-ограниченной внутри L (или вне L). Следовательно, считая сначала $\nu(s)\equiv 0$, мы докажем в силу предложений 1 и 2 теорему 3 для $F_1(z)=P_1+iQ_1$; считая затем $\mu(s)\equiv 0$, мы также обнаружим справедливость теоремы 3 для $F_2(z)=P_2+iQ_2$, откуда будет следовать справедливость теоремы 3 для $F(z)=\frac{1}{2\pi i}[F_1(z)+iF_2(z)]$.

Теорема 3 может быть дополнена следующим предложением: 4. При условиях т-мы 3 предельные значения ф-лы (II) удовлетворяют условию Липшитца с тем же показателем α, если $\alpha<1$, и с показателем сколь угодно близким к 1, если $\alpha=1$. Это последнее предложение в моей прежней работе было установлено для случая окружности*. Предлагаемый ниже метод представляет собою распространение приема, примененного мною в случае окружности, на случай произвольного кусочно-гладкого контура L без точек заострения.

Доказательство. Как показывают формулы (3) и (4), задача заключается в исследовании интеграла вида

$$g(x_\sigma)=\int_L \frac{f(x)-f(x_\sigma)}{x-x_\sigma}\,dx, \tag{6}$$

как функции x_σ.

Давая σ приращение $\Delta\sigma$, получим: $g(x_\sigma+\Delta x_\sigma)=\int_L \frac{f(x)-f(x_\sigma+\Delta x_\sigma)}{x-x_\sigma-\Delta x_\sigma}\,dx$,

откуда

$$g(x_\sigma+\Delta x_\sigma)-g(x_\sigma)=\int_L\left[\frac{f(x)-f(x_\sigma+\Delta x_\sigma)}{x-x_\sigma-\Delta x_\sigma}-\frac{f(x)-f(x_\sigma)}{x-x_\sigma}\right]dx. \tag{7}$$

Интегрируем сначала от $\sigma-\varepsilon$ до $\sigma+\varepsilon$, считая $\varepsilon=3|\Delta\sigma|$. Воспользовавшись условием (1), найдем, что эта часть интеграла (7) по абсолютной величине меньше, чем

$$K_1\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\left[|s-\sigma-\Delta\sigma|^{\alpha-1}+|s-\sigma|^{\alpha-1}\right]ds<K_2|\Delta\sigma|^\alpha, \tag{8}$$

так как

$$1\geqslant\frac{|x_1-x_2|}{|s_1-s_2|}>c>0. \tag{9}$$

Остается выполнить интегрирование по дуге L_ε, полученной из L путем выкидывания дуги $(\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$. Предварительно преобразуем подинтегральную функцию в интеграле (7) к виду:

$$[f(x)-f(x_\sigma+\Delta x_\sigma)]\frac{\Delta x_\sigma}{(x-x_\sigma)(x-x_\sigma-\Delta x_\sigma)}-[f(x_\sigma+\Delta x_\sigma)-f(x_\sigma)]\frac{1}{x-x_\sigma}. \tag{10}$$

* L. c. стр. 80.

Замечая, что $\left|\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{dx}{x-x_\sigma}\right| < C$, мы заключаем: интеграл от функции (10), взятый вдоль линии L_ε, по абсолютной величине будет меньше, чем

$$K_3 |\Delta\sigma|^\alpha + K_4 |\Delta\sigma|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1, \tag{11}$$

в случае же $\alpha = 1$ меньше, чем

$$K_5 |\Delta\sigma| \ln \frac{1}{|\Delta\sigma|} + K_6 |\Delta\sigma| < K_7 |\Delta\sigma|^{1-\eta}, \tag{12}$$

где $\eta > 0$ сколь угодно мало. При выводе оценок (11) и (12) мы воспользовались неравенствами (1) и (9).

Объединяя оценки (8) и (11), соответственно (8) и (12), мы видим, что

$$|g(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g(x_\sigma)| < C_1 |\Delta\sigma|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1,$$

и

$$|g(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g(x_\sigma)| < C_2 |\Delta\sigma| \ln \frac{1}{|\Delta\sigma|} < C_3 |\Delta\sigma|^{1-\eta},$$

где $\eta > 0$ сколь угодно мало, если $\alpha = 1$.

Последние неравенства могут быть заменены им эквивалентными:

$$|g(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g(x_\sigma)| < C_1' |\Delta x_\sigma|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1$$

и

$$|g(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g(x_\sigma)| < C_3' |\Delta x_\sigma|^{1-\eta}, \text{ если } \alpha = 1.$$

Итак, теорема 4 доказана полностью.

В заключение отметим предложение относительно потенциала двойного слоя, получающееся из теорем 3 и 4, если в формуле (II) отделить действительные части от мнимых, считая $\nu(s) \equiv 0$.

5. Если контур L есть кусочно-гладкий без точек заострения и функция $\mu(s)$, заданная на L, удовлетворяет условию Липшитца

$$|\mu(s_1) - \mu(s_2)| < K |s_1 - s_2|^\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x, y) &= \int\limits_L \mu(s) \frac{\cos(n, r)}{r} ds \to \int\limits_L \mu(s) \left(\frac{\cos(n, r)}{r}\right)_\sigma ds \pm \pi(1 \mp \theta) \\ P_1(x, y) &= \int\limits_L \mu(s) \frac{\sin(n, r)}{r} ds \to \int\limits_L \mu(s) \left(\frac{\sin(n, r)}{r}\right)_\sigma ds, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

где точка (x, y) стремится к точке σ по любому пути [верхние знаки — для случая изнутри L, нижние — в случае внешней точки (x, y)], причем предельные значения формул (III) также удовлетворяют условию Липшитца с тем же показателем α, если $\alpha < 1$, и с показателем, сколь угодно близким к 1, если $\alpha = 1$. Другими словами, в случае кусочно-гладкого контура L и плотности $\mu(s)$, удовлетворяющей условию Липшитца порядка α, потенциал двойного слоя $Q_1(x, y)$ и с ним сопряженная гармоническая функция — $P_1(x, y)$ имеют по всем путям во всех точках контура L (изнутри и извне L) предельные значения, выражаемые формулами (III), причем эти предельные значения также удовлетворяют условию Липшитца с показателем α, если $\alpha < 1$, и с показателем, сколь угодно близким к 1, если $\alpha = 1$.

Поступило
15 IV 1939.