Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

МАТЕМАТИКА

С. В. БАХВАЛОВ

О РАССЛОЯЕМЫХ ПАРАХ КОНГРУЭНЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С КОНГРУЭНЦИЯМИ BIANCHI

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 10 IV 1939)

Две конгруэнции L_1, L_2 с соответственными лучами l_1, l_2 называют парой расслояемых конгруэнций в 2 направлениях, если можно присоединить семейство поверхностей $\sum_1 (\infty^1)$ и семейство поверхностей $\sum_2 (\infty^1)$, так что:

1) касательные плоскости к поверхностям $\sum_1$ вдоль луча l_1 проходят через l_2 и

2) касательные плоскости к поверхностям $\sum_2$ вдоль l_2 проходят через l_1.

Пусть L_3 — конгруэнция общих перпендикуляров l_3 к лучам l_1, l_2 и N_1, N_2—точки пересечения лучей l_1, l_2 с l_3.

В настоящей заметке рассматривается случай, когда поверхности N_1, N_2 принадлежат соответственно семействам $\sum_1$ и $\sum_2$.

Задача решается методом подвижного трехгранника.

Примем за вершину трехгранника T середину M отрезка N_1N_2 и за оси — прямые, параллельные лучам l_1, l_2, l_3.

Пусть $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ — единичные векторы осей трехгранника. Перемещение трехгранника, присоединенного указанным образом к паре расслояемых конгруэнций L_1, L_2, определяется следующей системой уравнений [1]:

$$d\overline{M} = \omega_1 \cdot \bar{I}_1 + \omega_2 \cdot \bar{I}_2 + \omega_3 \cdot \bar{I}_3. \tag{1}$$

$$d\bar{I}_j = \omega_{j1} \cdot \bar{I}_1 + \omega_{j2} \cdot \bar{I}_2 + \omega_{j3} \cdot \bar{I}_3. \tag{2}$$

$$\omega_{11} = -p\omega_{12}, \ \omega_{22} = -p\omega_{21}, \ \omega_{33} = 0. \tag{3}$$

$$dp = (1-p^2)(\omega_{12} + \omega_{21}), \ \omega_{31} + p\omega_{32} + \omega_{13} = 0, \ p\omega_{31} + \omega_{32} + \omega_{23} = 0. \tag{4}$$

$$[\omega_3 - da, \omega_{13}] + [2a\omega_{12}, \omega_{23}] = 0, \ [\omega_3 + da, \omega_{23}] + [-2a\omega_{21}, \omega_{13}] = 0. \tag{5}$$

$$[\omega_1 - a\omega_{31}, \omega_3 + da] + [\omega_2 + a\omega_{32}, 2a\omega_{21}] = 0; \ [\omega_2 + a\omega_{32}, \omega_3 - da] + \\ + [\omega_1 - a\omega_{31}, -2a\omega_{12}] = 0. \tag{6}$$

$$[\omega_1, \omega_{13}] - [\omega_2, \omega_{23}] = 0. \tag{7}$$

$$[da, \omega_3] + 2a^2 [\omega_{12} \cdot \omega_{21}] = 0, \tag{8}$$

где

$$2a = N_1N_2 \ \text{и} \ p = \bar{I}_1 \cdot \bar{I}_2. \tag{9}$$

При условии (9)

$$\overline{N}_1=\overline{M}+a\overline{I}_3;\ \overline{N}_2=\overline{M}-a\overline{I}_3. \tag{10}$$

Отсюда находим, что

$$d\overline{N}_1=(\omega_1+a\omega_{31})\cdot\overline{I}_1+(\omega_2+a\omega_{32})\cdot\overline{I}_2+(\omega_3+da)\cdot\overline{I}_3,$$
$$d\overline{N}_2=(\omega_1-a\omega_{31})\cdot\overline{I}_1+(\omega_2-a\omega_{32})\cdot\overline{I}_2+(\omega_3-da)\cdot\overline{I}_3. \tag{11}$$

По предположению касательные плоскости к поверхностям N_1, N_2 содержат соответственно пары векторов $(\overline{I}_2, \overline{I}_3)$ и $(\overline{I}_1, \overline{I}_3)$. Следовательно в уравнениях (11)

$$\omega_1+a\cdot\omega_{31}\equiv 0,\ \omega_2+a\omega_{32}\equiv 0. \tag{12}$$

Дифференцируя внешним образом ω_{31}, ω_{32} из (12), получаем:

$$[\omega_1, \omega_3+da]+[\omega_2, 2a\omega_{21}]=0,\ [\omega_1, -2a\omega_{12}]+[\omega_2, \omega_3-da]=0. \tag{13}$$

Применяя к уравнениям (13) лемму Cartan'a ([2]), получаем:

$$\omega_3+da=x\cdot\omega_1+y\cdot\omega_2,\quad -2a\omega_{12}=s\cdot\omega_1+t\cdot\omega_2,$$
$$2a\omega_{21}=y\cdot\omega_1+z\cdot\omega_2,\ \omega_3-da=t\cdot\omega_1+r\cdot\omega_2. \tag{14}$$

Из уравнения (4, 12) следует, что

$$\omega_{13}=\frac{\omega_1-p\omega_2}{a},\quad \omega_{23}=\frac{p\omega_1-\omega_2}{a}. \tag{15}$$

Подставляя значения ω_3+da, $\omega_3-da, \ldots$ в уравнения (5, 6, 7, 8), получаем

$$r=s,$$
$$z=x.$$

Таким образом система уравнений (14) принимает вид:

$$\omega_3+da=x\cdot\omega_1+y\cdot\omega_2,\quad -2a\omega_{12}=s\cdot\omega_1+t\cdot\omega_2,$$
$$2a\omega_{21}=y\cdot\omega_1+x\cdot\omega_2,\quad \omega_3-da=t\cdot\omega_1+s\cdot\omega_2. \tag{14'}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (3, 4, 12, 15, 14'), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&[dx, \omega_1]+[dy, \omega_2]=A\,[\omega_1\omega_2]\\
&[dy, \omega_1]+[dx, \omega_2]=B\,[\omega_1\omega_2]\\
&[ds, \omega_1]+[dt, \omega_2]=C\,[\omega_1\omega_2]\\
&[dt, \omega_1]+[ds, \omega_2]=D\,[\omega_1\omega_2]
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где A, B, C, D — функции, зависящие от x, y, s, t, p, a.

Так как

$$\Delta=(\omega_1^2-\omega_2^2)^2\not\equiv 0,$$

то решение поставленной задачи существует и зависит от 4 произвольных функций 1 аргумента ([2]).

Покажем, что конгруэнция L_3 есть конгруэнция Bianchi.

Конгруэнция L_3 называется конгруэнцией Bianchi ([3]), если

a) L_3 — конгруэнция W,

b) равны гауссовы кривизны в соответствующих точках N_1, N_2 фокальных полостей.

Так как $[\bar{I}_2 \cdot \bar{I}_3]$, $[\bar{I}_1 \cdot \bar{I}_3]$ — единичные векторы нормалей к поверхностям N_1, N_2, то вторые квадратичные формы φ_1, φ_2 этих поверхностей имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= d^2\overline{N}_1 \cdot [\bar{I}_2 \cdot \bar{I}_3] = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1-p^2}, \\ \varphi_2 &= d^2\overline{N}_2 \cdot [\bar{I}_1 \cdot \bar{I}_3] = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \frac{s}{a} \sqrt{1-p^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Сравнение этих форм показывает, что на поверхностях N_1, N_2 асимптотические линии соответствуют друг другу.

Из уравнений (11, 12, 14) находим первые квадратичные формы поверхностей N_1, N_2:

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= d\overline{N}_1^2 = 4\omega_2^2 + (x\omega_1 + y\omega_2)^2, \\ ds_2^2 &= d\overline{N}_2^2 = 4\omega_1^2 + (t\omega_1 + s\omega_2)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнений (17, 18) следует, что гауссовы кривизны K_1, K_2 в точках N_1, N_2 равны между собой и

$$K_1 = K_2 = -\frac{1-p^2}{4a^2}.$$

Легко показать, что конгруэнция L_3 — произвольная конгруэнция Bianchi с действительными асимптотическими линиями фокальных полостей.

Так как псевдосферическая конгруэнция представляет частный случай конгруэнции Bianchi, то наши рассуждения относятся и к псевдосферической конгруэнции.

Механико-математический факультет
Московского гос. университета.

Поступило
10 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Бахвалов, ДАН, XXI, № 6 (1938). [2] G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, ch. XII. [3] L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, II, p. 1, § 306.