Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. ЕФИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 III 1939)

Пусть M_0—регулярная точка аналитической поверхности U. Рассмотрим гауссово отображение U на единичную сферу E и обозначим через M произвольную точку U, через M'—ее отображение на E; фиксируем далее направление положительных поворотов вокруг нормали к U в точке M_0. Если M, перемещаясь по простому малому контуру, окружающему M_0 на поверхности U, обходит его в положительном направлении один раз, то M' на сфере E может совершить вокруг точки M'_0 k обходов в том же или в противоположном направлении. Число k может быть больше единицы только в случае параболической точки M_0, т. е. в случае, когда гауссова кривизна в точке M_0 равна нулю. Это число, как арифметический инвариант, характеризующий строение поверхности в окрестности M_0, отметил С. Э. Кон-Фоссен (1). Условимся называть индексом точки M_0 число $+k$, если M' совершает вокруг M'_0 k обходов в положительном направлении, и $-k$, если M' совершает k обходов в отрицательном направлении. Индекс может принимать значения $+1, 0, -1, -2, \ldots$ и будет в точке M_0 определенным, если через M_0 не проходит плоская параболическая линия, вдоль которой касательные плоскости к U совпадают.

Очевидна следующая теорема:

Теорема 1. *При непрерывном изгибании окрестности изолированной параболической точки индекс этой точки остается неизменным.*

Теорему 1 указал автору С. Э. Кон-Фоссен, предложивший исследовать, является ли индекс также инвариантом относительно дискретного изгибания, и выяснить, в какой мере требование изолированности параболической точки в этой теореме является существенным. Следует заметить, что теорема 1 теряет очевидность при допущении, что через рассматриваемую точку проходит одна или несколько параболических линий, так как в некоторый момент изгибания какая-нибудь из этих линий может оказаться плоской с совпадающими вдоль нее касательными плоскостями к поверхности, и индекс станет неопределенным.

Ниже приводятся результаты исследования, относящегося к индексу и некоторым другим арифметическим инвариантам *.

---

* Недавно автору стала известна работа H. Schilt'a (2), посвященная изолированным параболическим точкам. В этой работе содержится результат, выражаемый в нашем тексте теоремой 8, и некоторые следствия из этой теоремы.

В дальнейшем $U(M_0)$ обозначает окрестность точки M_0 на U, $\tau(M_0)$— касательную плоскость к $U(M_0)$ в точке M_0, ind M_0—индекс точки M_0, p—порядок прикосновения $U(M_0)$ и $\tau(M_0)$, p_i и p_s—нижнюю и верхнюю грань значений p для всевозможных поверхностей $U'(M_0')$, изометричных с $U(M_0)$, наконец m—число (вещественных) ветвей кривой пересечения $U(M_0)$ с $\tau(M_0)$, имеющих в особой точке M_0 различные направления.

Легко могут быть доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. *Если* ind $M_0=0$, *то через* M_0 *проходит параболическая линия.*

Теорема 3. *Если* $m=p+1$, *то параболическая точка* M_0 *является изолированной.*

Теорема 4. p_s *существует, если метрика* $U(M_0)$ *не является евклидовой.*

В дальнейшем поверхности с евклидовой метрикой из рассмотрения исключаются.

Теорема 5. *Если* $m>1$, *то* $p=p_s$.

Теорема 6. *Для всякой поверхности* $U(M_0)$ $p_i=1$.

Теорема 7. $|\text{ind } M_0|\leqslant p$.

Следствием теорем 6 и 7 является

Теорема 8. *Какова бы ни была поверхность* $U(M_0)$, существует изометричная ей поверхность $U'(M_0')$ такая, что ind M_0' *равен одному из трех чисел*: -1, 0, $+1$.

Теорема 8 решает в отрицательном смысле первый вопрос, поставленный С. Э. Кон-Фоссеном.

Условимся $U(M_0)$ называть седлообразной поверхностью, если $m>1$ и кривая сечения $U(M_0)$ с $\tau(M_0)$ не содержит (вещественных) ветвей с общими в точке M_0 касательными.

Теорема 9. *Если седлообразные поверхности* $U(M_0)$ *и* $U'(M_0')$ *преобразуются друг в друга непрерывным изгибанием, в течение которого* m *остается большим единицы, то* ind $M_0=$ ind M_0' *.

В основе доказательства этой теоремы лежит теорема 5, в силу которой при указанном изгибании порядок прикосновения поверхности с касательной плоскостью $\tau(M_0)$ остается без изменения, и следующее предложение:

Пусть $U(M_0)$ определена в декартовых координатах уравнением

$$z=f(x,y),$$

причем точка M_0 совмещена с началом координат и $\tau(M_0)$ с плоскостью (x, y). Полагая $p=n-1$, напишем разложение $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности M_0 в виде:

$$f(x,y)=f^{(n)}(x,y)+f^{(n+1)}(x,y)+\ldots,$$

где

$$f^{(n)}(x,y)=\frac{1}{n!}\left(a_1 x^n+\left[\begin{matrix} n \\ 1\end{matrix}\right] a_2 x^{n-1}y+\ldots+a_{n+1}y^n\right).$$

Пусть далее матрица

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1}\end{matrix}\right\| \qquad (n\geqslant 4)$$

* Здесь и в дальнейшем левая часть уравнения изгибаемой поверхности вместе с ее частными производными по координатам до порядка $p+1$ предполагается непрерывной функцией от параметра изгибания.

имеет ранг, равный 3. Тогда соприкасающийся параболоид поверхности $U(M_0)$, определяемый в начальный момент уравнением

$$z = f^{(n)}(x, y),$$

не испытывает деформации, каково бы ни было непрерывное изгибание поверхности $U(M_0)$, сохраняющее порядок прикосновения ее с $\tau(M_0)$ (кроме отмеченных предложений при доказательстве теоремы 9 приходится принять во внимание некоторые свойства ряда Штурма).

Теорема 10. *Если линия пересечения $U(M_0)$ с $\tau(M_0)$ не имеет в особой точке M_0 кратных касательных, то любое непрерывное изгибание поверхности $U(M_0)$ сохраняет порядок ее прикосновения с касательной плоскостью $\tau(M_0)$.*

Из теорем 1 и 8, а также из теорем 6 и 10 вытекает, что, вообще говоря, для всякой окрестности $U(M_0)$ параболической точки M_0 существуют изометричные окрестности $U'(M_0')$, которые (даже в малом) не могут быть получены из $U(M_0)$ непрерывным изгибанием.

Теорема 11. *Если $p > 1$ и линия пересечения $U(M_0)$ с $\tau(M_0)$ имеет в особой точке M_0 двухкратную касательную, то поверхность $U'(M_0')$, получающаяся непрерывным изгибанием $U(M_0)$, в течение которого порядок прикосновения $U(M_0)$ и $\tau(M_0)$ изменяется монотонно, имеет с $\tau'(M_0')$ порядок прикосновения, не превышающий единицы; если $p > 2$ и существует трехкратная касательная, то порядок прикосновения $U'(M_0')$ с $\tau'(M_0')$ не выше двух; вообще при $p > n$ и при наличии $n+1$-кратной касательной $p' \leqslant n$.*

Опираясь на теоремы 9 и 10, можно установить теорему:

Теорема 12. *Индекс поверхности $U(M_0)$ (не обязательно седлообразной), для которой кривая пересечения $U(M_0)$ и $\tau(M_0)$ не имеет в M_0 кратных касательных, сохраняется при всяком непрерывном изгибании.*

Отметим в заключение некоторые результаты более частного характера.

Пусть $U(M_0)$ отнесена к гауссовым координатам (u^1, u^2) и $\overline{N}_0$ — единичный вектор нормали в точке M_0. Возьмем на $\tau(M_0)$ вблизи M_0 произвольную точку P и восставим в ней перпендикуляр ν к $\tau(M_0)$. Пусть M — точка пересечения этого перпендикуляра с поверхностью $U(M_0)$ и $K(M)$ — гауссова кривизна в точке M. Отложим от точки P на перпендикуляре ν отрезок длиною $|K|$ в сторону $\overline{N}_0$, если $K(M) > 0$, и в противоположную сторону, если $K(M) < 0$. Конец отложенного отрезка обозначим через $\overline{M}$. При перемещении точки P по плоскости $\tau(M_0)$ точка $\overline{M}$ опишет некоторую поверхность, проходящую через M_0. Обозначим эту поверхность через $U_k(M_0)$. Если g_{ij} — метрический тензор поверхности $U(M_0)$, G_{ij} и B_{ij} — два основных тензора поверхности $U_k(M_0)$, то в точке M_0 имеют место равенства

$$G_{ij} = g_{ij} + K_i K_j,$$

$$B_{ij} = \frac{w}{W} K_{1ij},$$

где $w = \sqrt{\operatorname{Det} g_{ij}}$ и $W = \sqrt{\operatorname{Det} G_{ij}}$, K_i и $K|_{ij}$ — ковариантные производные от кривизны относительно метрики поверхности $U(M_0)$. Отсюда в частности следует, что гауссова кривизна $\overline{K}(M_0)$ поверхности $U_k(M_0)$ является инвариантом относительно изгибания поверхности $U(M_0)$.

Если M_0 совмещена с началом координат и $\tau(M_0)$ — с плоскостью (x, y), то $U(M_0)$ представится уравнением $z = f(x, y)$.

При $p=2$ разложение $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности M_0 будет иметь вид:

$$f(x, y)=f^{(3)}(x, y)+f^{(4)}(x, y)+\ldots$$

Обозначим дискриминант формы $f^{(3)}(x, y)$ через D.

Прямым вычислением легко убедиться в справедливости равенства:

$$D=\overline{K}(M_0).$$

Отсюда вытекает, что кратность касательных в особой точке M_0 кривой пересечения $U(M_0)$ и $\tau(M_0)$ сохраняется при всяком изгибании, оставляющем $p=2$ (обстоятельство, хорошо известное для случая $p=1$).

Исходя из теоремы 3, можно установить, что если $U(M_0)$ и $U'(M_0')$ — две изометричные седлообразные поверхности, имеющие с касательными плоскостями прикосновение не выше третьего порядка, то $\operatorname{ind} M_0=\operatorname{ind} M_0'$.

Следует иметь в виду, что понятие седлообразной поверхности нами сужено данным выше определением.

Воронежский государственный университет.

Поступило
14 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, стр. 180.
[2] H. Schilt, Compositio Mathem., 5 (1937).