Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

В настоящей статье даются близкие к предельным оценки простейших тригонометрических сумм с простыми числами. Эти оценки я получаю, применяя мой общий метод (1) и частично известный метод Viggo Brun'a. Некоторая незначительная часть моих результатов (малые q) может быть получена также, как непосредственное следствие известных до моей работы 1937 г. теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметической прогрессии (Titchmarsh, Page, Siegel, Estermann).

Кроме того я пользуюсь здесь случаем сообщить мои новые оценки для обычных тригонометрических сумм.

Как и раньше, обозначение $A \ll B$ понимается в смысле $A = 0\,(B)$.

1°. Пусть n — целое положительное постоянное, $N > 2$, $r = \log N$, q — целое, $(a, q) = 1$,

$$S = \sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p^n},$$

где p пробегает простые числа.

Тогда имеют место три следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* ε — *положительное постоянное* $\leqslant \frac{1}{3}$, η — *произвольно малое положительное постоянное* $< \varepsilon$, $Ne^{-r^{1-2\varepsilon}} \ll A \leqslant N$, $0 < q \leqslant e^{r^\varepsilon}$.

Тогда имеем

$$S \ll A r^{3\varepsilon-1} q^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* ε, η *и* h — *произвольно малые положительные постоянные* < 1, *а* σ *и* α — *постоянные, связанные условием*

$$4\alpha + 6\sigma = \frac{1}{1+h}.$$

Пусть далее

$$N^{1-\alpha} \leqslant A \leqslant N,\ e^{r^\varepsilon} < q \leqslant N^\sigma.$$

Тогда имеем

$$S \ll A q^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. *Пусть* η *и* h — *произвольно малые положительные постоянные* < 1, *а* ε, σ *и* α — *постоянные, связанные условиями*

$$0 < \varepsilon < \sigma, \quad 3\alpha + 5\sigma = \frac{1}{1 + h}.$$

Пусть далее

$$N^{1-\alpha} \leqslant A \leqslant N, \quad N^{\varepsilon} < q \leqslant N^{\sigma}.$$

Тогда имеем

$$S \ll A q^{\eta - \frac{1}{2}}.$$

Замечание. В случае $n = 1$ однако полезнее применять метод одной из прежних моих работ [2]. Тогда теоремы 2 и 3 оказываются верными и при более широких условиях.

2°. В одной из моих последних работ [3] были приведены общие теоремы, дающие оценки тригонометрических сумм с подсчетом коэффициентов оценок. Однако небольшое видоизменение вычислений позволяет эти коэффициенты значительно улучшить. В этом улучшенном виде указанные теоремы будут изложены в моей большой монографии, которая появится в печати не очень скоро. Поэтому в виду важных приложений, которые имеют мои теоремы, я привожу здесь их улучшенные формулировки.

Теорема 4. *Пусть* n — *целое* $\geqslant 13$, $\nu_1 = \frac{1}{n+1}$, m — *целое* > 0, Q — *целое*, P — *целое* > 0, $a_{n+1}, \ldots, a_1$ — *вещественные*,

$$a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \ |\theta| \leqslant 1,$$

$$f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_1 x, \quad S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Тогда имеем

1. $$|S| < 15 n P q^{-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log (n+1)},$$

если

$$1 \leqslant q \leqslant P, \quad m \leqslant q^{\nu_1^3}.$$

2. $$|S| < 7.5 n P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log \mu (n+1)},$$

если

$$P \leqslant q \leqslant P^n, \quad q = P^{\mu}, \quad m \leqslant P^{\nu_1^3}.$$

3. $$|S| < 7.5 \frac{n}{\tau} P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\tau}{(n+1)^3 \log \frac{n(n+1)}{\tau}},$$

если

$$P \leqslant q < P^{n+1}, \quad q = P^{n+1-\tau}, \quad m \leqslant P^{\tau \nu_1^3}.$$

Добавление к теореме 4. При обозначениях теоремы 4, но уже для любых целых положительных m соответственно трем случаям теоремы 4 имеем

1. $$|S| < 15 n m^{\frac{3}{2}\rho} P q^{-\rho}.$$

2. $$|S| < 7.5 n m^{\frac{3}{2}\rho} P^{1-\rho}.$$

3. $$|S| < 7.5 \frac{n}{\tau} m^{\frac{3}{2}\rho} P^{1-\rho}.$$

Теорема 5. *Пусть n — целое $\geqslant 14$, Q и P — целые, $P > 0$, $F(z)$ — вещественная функция в интервале*

$$Q < z \leqslant Q + P,$$

удовлетворяющая условиям

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \leqslant \frac{l}{A}, \quad \left| \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{f}{AP^{\frac{2}{3}}},$$

где

$$P \leqslant A \leqslant P^2; \quad l \leqslant 2^n, \quad f \leqslant 2^n.$$

Пусть далее

$$S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i F(z)}.$$

Тогда имеем

$$|S| < 7.5nP^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log 2(n+1)}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
20 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, ДАН, XXII, № 2 (1939). [2] И. М. Виноградов, Изв. Акад. Наук, серия математич., № 1 (1938). [3] И. М. Виноградов, Изв. Акад. Наук, серия математич., № 5—6 (1938).