Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. П. МИЛЬМАН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 I 1939)

I. Введем следующие определения.

Определение 1. Топологическое пространство будем называть «*ϑ_0-компактным*», где ϑ_0 — предельное порядковое число, если для всякой невозрастающей последовательности

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta \supseteq \ldots \vartheta < \vartheta_1; \quad \vartheta_1 \leqslant \vartheta_0$$

непустых замкнутых множеств существует непустое пересечение.

Замечание. Нетрудно видеть, что: 1° — ω-компактность есть обыкновенная компактность, 2° — компактность любого порядка есть бикомпактность, 3° — если пространство ω_α-компактно (ω_α — начальное число мощности $/c_\alpha$), то оно ϑ_0-компактно при $\vartheta_0 < \omega_{\alpha+1}$.

Определение 2 (1). Пространство Банаха E называется регулярным, если для каждого $F \in \overline{\overline{E}}$ существует $x \in E$ такое, что

$$F(f) = f(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \overline{E}.$$

Определение 3. Множество L регулярного пространства Банаха E будем называть ϑ_0-слабо-замкнутым (ϑ_0 — предельное порядковое число), если вместе с любой последовательностью $\{x_\vartheta\}_{\vartheta<\vartheta_1}$ (ϑ_1 — предельное порядковое число $\vartheta_1 \leqslant \vartheta_0$), которой отвечает некоторое x_0 такое, что

$$\lim_{\vartheta<\vartheta_1} f(x_\vartheta) = f(x_0) \quad \text{для всех} \quad f \in \overline{E}, \tag{1}$$

множество L содержит также элемент x_0.

Определение 4*. Метрическим кардинальным числом измерения пространства Банаха называется мощность последовательности элементов

$$x_1, x_2, \ldots x_\vartheta, \ldots \vartheta < \vartheta_0,$$

каждый из которых находится на положительном расстоянии от линейной оболочки предыдущих и замкнутая линейная оболочка которых есть все пространство. Löwig показал (2), что это число не зависит от выбора последовательности указанного типа.

---

* Это определение принадлежит Löwig'y (2).

Можно показать (этот результат подмечен М. Г. Крейном совместно с автором), что метрическое кардинальное число измерений сопряженного пространства $\overline{E}$ всегда не менее метрического кардинального числа данного пространства E. В частности отсюда следует необходимое для дальнейшего предложение:

(А) *Метрические кардинальные числа измерений регулярного пространства E и его сопряженного пространства совпадают.*

II. В связи с введенными выше понятиями мы доказываем следующее.

Теорема 1. *Если множество L регулярного пространства E ограничено и ϑ_0-слабо-замкнуто, то L ϑ_0-компактно в смысле топологии, образуемой в нем системой его ϑ_0-слабо-замкнутых подмножеств* *.

Доказательство. Пусть интервал $1 \leqslant \vartheta < \vartheta_0$ имеет мощность $/c_\alpha$. По замечанию, сделанному к определению 1, достаточно доказать, что L ω_α-компактно.

Будем доказывать теорему трансфинитной индукцией. Именно, допустим, что теорема верна для всех начальных чисел ω_γ мощностей $|c_\gamma < |c_\beta$, где $\beta \leqslant \alpha$, и докажем ее для начального числа ω_β.

Пусть

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta \supseteq \ldots \quad (\vartheta < \omega_\beta,\ L_1 \subseteq L) \tag{2}$$

последовательность непустых ω_β-слабозамкнутых множеств.

Если в принятых условиях индукции будет доказано, что $\prod\limits_{\vartheta<\omega_\beta} L_\vartheta$ непусто, то этим будет проведена индукция и следовательно доказана теорема. Поэтому можно считать, что в (2) всюду стоит знак $\supset$.

Пусть

$$x_\vartheta \in L_\vartheta - L_{\vartheta+1} \quad \vartheta < \omega_\beta. \tag{3}$$

Пусть E_0 есть линейная замкнутая оболочка $\{x_\vartheta\}_{\vartheta<\omega_\beta}$. По теореме А. И. Плеснера всякое замкнутое подпространство регулярного пространства регулярно ([1]). Следовательно E_0 — регулярно и в силу предложения (А) существует плотная в $\overline{E}_0$ последовательность

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots f_\vartheta \ldots \quad \vartheta < \omega_\beta. \tag{4}$$

Обозначим через $L_\vartheta^{(1)}$ наименьшее замкнутое (в новой топологии) множество, содержащее $\{x_\theta\}_{\vartheta \leqslant \theta < \omega_\beta}$. Очевидно имеет место

$$L_1^{(1)} \supseteq L_2^{(1)} \supseteq L_3^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(1)} \supseteq \ldots; \quad L_\vartheta \supseteq L_\vartheta^{(1)}; \quad \vartheta < \omega_\beta. \tag{5}$$

Введем сокращенные обозначения. Если H — некоторое множество из E, а $f \in \overline{E}$, то через $f(H)$ мы обозначим совокупность всех различных значений функционала $f(x)$ на элементах $x \in H$. Знак $\prod$ мы будем употреблять только лишь для обозначения пересечения множеств. Кроме того знак $\overset{df}{=}$ следует читать, как «равно по определению».

Положим,

$$C_\vartheta^{(1)} \overset{df}{=} \prod_{\vartheta \leqslant \theta < \omega_\beta} f_1(L_\theta^{(1)}) \qquad (\vartheta < \omega_\beta) \tag{6}$$

множества $f_1(L_\theta^{(1)})$ суть ограниченные, замкнутые множества чисел [ибо $L_\theta^{(1)}$ слабо замкнуты и E — локально слабо-компактно ([1])], поэтому $C_\vartheta^{(1)}$ суть непустые, ограниченные, замкнутые множества чисел.

---

* Непосредственно проверяется, что система указанных множеств вместе с пустым множеством годится в качестве системы замкнутых множеств.

Положим,

$$m_{f_1} \overset{df}{=} \sup_{\vartheta<\omega_\beta} \inf C_\vartheta^{(1)} \qquad (\inf C_\vartheta^{(1)} \overset{df}{=} \inf_{\alpha \in C_\vartheta^{(1)}} \alpha). \tag{7}$$

Из этого определения вытекает существование $\vartheta_1 < \vartheta$ (зависящего, вообще говоря, от f_1) такого, что

$$m_{f_1} = \inf C_\vartheta^{(1)} = \inf C_{\vartheta_1}^{(1)},$$
$$\inf C_\vartheta^{(1)} = f_1(y_\vartheta^{(1)}), \text{ где } y_\vartheta^{(1)} \in L_\vartheta^{(1)}. \tag{8}$$

Легко видеть, что всякий линейный функционал на E является непрерывным функционалом на L в смысле установленной топологии.

Но мы уже видели, что при $\vartheta_1 < \vartheta$ $m_{f_1} \in f_1(L_\vartheta^{(1)})$, следовательно полный прообраз m_{f_1} в $L_\vartheta^{(1)}$ есть замкнутое непустое множество $L_\vartheta^{(2)}$ при $\vartheta > \vartheta_1$; так как $L_\vartheta^{(1)} \supseteq L_{\vartheta_1}^{(1)}$ при $\vartheta < \vartheta_1$, то следовательно множества $L_\vartheta^{(2)}$ определены при ϑ, удовлетворяющих соотношению $1 \leqslant \vartheta < \omega_\beta$.

Множества $\{L_\vartheta^{(2)}\}$ непусты, замкнуты, и для них выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} &L_1^{(2)} \supseteq L_2^{(2)} \supseteq L_3^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(2)} \supseteq \ldots;\ L_\vartheta^{(1)} \supseteq L_\vartheta^{(2)}; \\ &f_1(L_\vartheta^{(2)}) = m_{f_1}. \end{aligned} \quad (\vartheta < \omega_\beta) \right\} \tag{5'}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, строим последовательно $f_2(L_\vartheta^{(2)})$, $C_\vartheta^{(2)}$, m_{f_2} и наконец $L_\vartheta^{(3)}$, где $\vartheta < \omega_\beta$. При этом будет выполняться следующее:

$$C_\vartheta^{(2)} \overset{df}{=} \prod_{\vartheta \leqslant \theta < \omega_\beta} f_2(L_\theta^{(2)}), \tag{6'}$$

$$\left.\begin{aligned} &m_{f_2} \overset{df}{=} \sup_{\theta<\omega_\beta} \inf C_\theta^{(2)} = \inf C_\vartheta^{(2)} = \inf C_{\vartheta_2}^{(2)} \qquad \vartheta > \vartheta_2 \\ &\inf C_\vartheta^{(2)} = f_2(y_\vartheta^{(2)}), \text{ где } y_\vartheta^{(2)} \in L_\vartheta^{(2)} \qquad \vartheta_2 \text{ — некоторое фиксированное порядковое число} \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

$$\left.\begin{aligned} &L_1^{(3)} \supseteq L_2^{(3)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(3)} \supseteq \ldots;\ L_\vartheta^{(2)} \supseteq L_\vartheta^{(3)}; \\ &f_1(L_\vartheta^{(3)}) = m_{f_1};\ f_2(L_\vartheta^{(3)}) = m_{f_2}. \end{aligned} \quad \vartheta < \omega_\beta \right\} \tag{5''}$$

Так продолжаем процесс образования $L_\vartheta^{(n)}$ для всех $n < \omega$.

По предположению индукции мы заключаем, что $L_\vartheta^{(\omega)} \overset{df}{=} \prod_{n<\omega} L_\vartheta^{(n)}$ непусто, если помнить, что $L_\vartheta^{(n)}$ слабо-замкнуты порядка ω, и $\omega < \omega_\beta$. Вообще же $\{L_\vartheta^{\theta_0}\}_{\vartheta<\omega_\beta}$ строятся, как $L_\vartheta^{(2)}$, если θ_0 имеет непосредственно предшествующее число, и строятся, как $L_\vartheta^{(\omega)}$, если θ_0 есть предельное порядковое число, для которого: $\theta_0 < \omega_\beta$; следует только учесть, что в случае, когда существует $\beta - 1$ и $\theta_0 > \omega_{\beta-1}$, последовательность

$$L_\vartheta^{(1)} \supseteq L_\vartheta^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(\theta)} \supseteq \ldots;\ (\theta < \theta_0)$$

имеет непустое пересечение по предположению индукции [в силу замечания к определению (1)].

Последовательность $\{L_\vartheta^{(\theta_0)}\}_{\vartheta<\omega_\beta}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &L_\vartheta^{(\theta)} \supseteq L_\vartheta^{(\theta_0)} \\ &L_1^{(\theta_0)} \supseteq L_2^{(\theta_0)} \supseteq L_3^{(\theta_0)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(\theta_0)} \supseteq \ldots; \qquad (\theta < \theta_0 < \omega_\beta,\ \vartheta < \omega_\beta). \\ &f_\theta(L_\vartheta^{(\theta_0)}) = m_{f_\theta} \end{aligned}\right\} \tag{5'''}$$

Из соотношений (5), (5′), (5″), (5‴) вытекает:

$$\left.\begin{array}{l} L_1^{(1)} \supseteq L_2^{(2)} \supseteq L_3^{(3)} \supseteq \ldots \supseteq L_\vartheta^{(\vartheta)} \supseteq \ldots; \quad L_\vartheta^{(1)} \supseteq L_\vartheta^{(\vartheta)}; \quad (\vartheta < \omega_\beta) \\ f_\theta(L_\vartheta^{(\vartheta)}) = m_{f_\theta}; \qquad (\theta < \vartheta). \end{array}\right\} \tag{9}$$

Отсюда вытекает соотношение:

$$\prod_{\vartheta < \omega_\beta} f_\theta(L_\vartheta^{(\vartheta)}) = m_{f_\theta}; \qquad (\theta < \omega_\beta). \tag{10}$$

Пусть теперь $f \in \overline{E}_0$. Тогда существует последовательность порядковых чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots \to \theta^0$ $(\theta^0 < \omega_\beta)$ такая, что:

$$f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \ldots \to f.$$

Если $L_{\theta^0}^{(\theta^0)}$ содержит две точки z_1, z_2, то из соотношения

$$f_{\theta_n}(L_{\theta^0}^{\theta^0}) = m_{f_{\theta_n}}$$

вытекает

$$f_{\theta_n}(z_1) = f_{\theta_n}(z_2) = m_{f_{\theta_n}}.$$

Следовательно

$$|f(z_1) - f_{\theta_n}(z_2)| \leqslant \|f - f_{\theta_n}\| \cdot \|z_1\| + |f_{\theta_n}(z_1) - f_{\theta_n}(z_2)| \leqslant \|f - f_{\theta_n}\| \cdot R,$$

где R — радиус сферы, содержащей L.

В виду произвольности $z_1 \in L_{\theta^0}^{(\theta^0)}$ заключаем, что множество $f(L_{\theta^0}^{(\theta^0)})$ состоит из одного числа m_f, где

$$m_f \overset{df}{=} \lim_{n \to \infty} m_{f_{\theta_n}}.$$

Итак,

$$\prod_{\vartheta < \omega_\beta} f(L_\vartheta^{(\vartheta)}) = m_f \qquad (f \in \overline{E}_0).$$

Нетрудно видеть, что $m_f = F(f)$ есть линейный функционал в $\overline{E}_0$. Следовательно в виду регулярности E_0 существует $x_0 \in E_0$ такое, что:

$$F(f) = f(x_0) \quad \text{для всех } f \in \overline{E}_0.$$

Итак,

$$\prod_{\vartheta < \omega_\beta} f(L_\vartheta^{(\vartheta)}) = f(x_0) \quad \text{для всех } f \in \overline{E}_0; \tag{11}$$

так как $L_1^{(1)}$ и x_0 принадлежат к E_0, то (11) верно также при всех $f \in \overline{E}$.

Пусть $y_\vartheta \in L_\vartheta^\vartheta$, тогда (11) влечет за собой равенство:

$$\lim_{\vartheta < \omega_\beta} f(y_\vartheta) = f(x_0) \quad \text{для всех } f \in \overline{E}.$$

Так как L_ϑ^ϑ ω_β слабо-замкнуто, то $x_0 \in L_\vartheta^{(\vartheta)}$ для всех $\vartheta < \omega_\beta$.

Из соотношения (9) вытекает:

$$x_0 \in \prod_{\vartheta < \omega_\beta} L_\vartheta^{(1)}.$$

Из соотношения (5) заключаем окончательно

$$x_0 \in \prod_{\vartheta < \omega_\beta} L_\vartheta.$$

Этим по индукции доказана теорема.

Теорема 2. *Всякое регулярное пространство локально-бикомпактно в смысле топологии, образуемой системой всевозможных множеств ϑ-слабо-замкнутых при любом ϑ*.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 1 на основании замечания к определению 1.

Теорема 3. *В регулярном пространстве E «топология по Тихонову» совпадает с топологией, указанной в теореме* 2.

При этом под «топологией по Тихонову» будем понимать топологию в E, заданную окрестностями вида:

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

где f_i — произвольные линейные функционалы, взятые в произвольном конечном числе.

Доказательство. Множества вида: $f(x) \geqslant c$ образуют определяющую систему множеств, замкнутых в «топологии Тихонова».

Это же множество: $f(x) \geqslant c$ замкнуто в топологии теоремы 2. Кроме того в «топологии по Тихонову» E — пространство Хаусдорфа. Следовательно применима — на основании теоремы 2 — известная теорема из теории множеств (Хаусдорф, «Теория множеств», стр. 148), согласно которой обе топологии совпадают.

Теоремы 2 и 3 интересно сопоставить с недавно полученной теоремой В. Л. Шмульяна [3]:

«Для того, чтобы пространство Банаха было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально бикомпактно в ,,топологии по Тихонову''».

Мы видим, что первая (наиболее трудная) часть этой теоремы является непосредственным следствием теорем 2 и 3.

Государственный университет.
Одесса.

Поступило
17 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гантмахер и В. Шмульян, ДАН, XVII, № 3 (1937). [2] H. Löwig, Studia Mathematica, V, 18—23 (1934). [3] В. Шмульян, ДАН, XXII, № 8 (1939).

* Очевидно вместо ϑ-слабой замкнутости при любом ϑ достаточно потребовать ω_α-слабую замкнутость, где $/c_\alpha$—кардинальное число измерений пространства E.