Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 7

МАТЕМАТИКА

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ

ОЦЕНКА ОДНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СУММЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 I 1939)

При рассмотрении некоторых вопросов аналитической теории чисел встречается необходимость оценки сумм вида

$$T_k^{(l)}(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m),$$

где $\tau_k(m)$ есть число решений $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ уравнения

$$x_1 x_2 \ldots x_k = m$$

в целых положительных числах.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *При любых целых $l \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$n^{-1} \cdot \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m) < A_k^{(l)} (\lg n + k^l - 1)^{k^l - 1}, \tag{1}$$

где

$$A_k^{(l)} = \frac{k^l}{(k!)^{\frac{k^l-1}{k-1}}}. \tag{2}$$

Доказательство. 1. Пусть $K(n_1, n_2, \ldots, n_i)$ означает общее наименьшее кратное целых положительных $n_1, n_2, \ldots, n_i$; тогда, принимая во внимание, что

$$\tau_k(m) = \sum_{d/m} \tau_{k-1}(d), \tag{3}$$

имеем

$$T_k^{(l)}(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \Big(\sum_{d/m} \tau_{k-1}(d) \Big)^l =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant m_i \leqslant n \\ (i=1,2,\ldots,l)}} \tau_{k-1}(m_1) \ldots \tau_{k-1}(m_l) \left[\frac{n}{K(m_1; m_2; \ldots; m_l)} \right] <$$

$$< \sum_{1 \leqslant m_1 \leqslant n} \tau_{k-1}(m_1) \sum_{d/m_1} \sum_{1 \leqslant m_2 \leqslant \left[\frac{n}{d}\right]} \tau_{k-1}(m_2 d) \sum_{\substack{m_q \leqslant n \\ (q=3,\ldots,l)}} \tau_{k-1}(m_3) \ldots$$

$$\ldots \tau_{k-1}(m_l) \left[\frac{n}{K(m_1 m_2; m_3; \ldots; m_l)} \right],$$

откуда в виду (3) и

$$\tau_i(n_1 n_2) \leqslant \tau_i(n_1)\,\tau_i(n_2) \tag{4}$$

имеем:

$$T_k^{(l)}(n) \leqslant \sum_{1\leqslant m_1\leqslant n} \tau_{k-1}(m_1)\,\tau_k(m_1) \sum_{1\leqslant m_2\leqslant n} \tau_{k-1}(m_2) \sum_{\substack{1\leqslant m_q\leqslant n\\(q=3,\ldots,l)}} \tau_{k-1}(m_3)\ldots$$

$$\ldots\tau_{k-1}(m_l)\left[\frac{n}{K\,(m_1m_2;\,m_3;\,\ldots;\,m_l)}\right].$$

Далее, подобно предыдущему получим:

$$T_k^{(l)}(n) <$$

$$< \sum_{1\leqslant m_1\leqslant n} \tau_{k-1}(m_1)\,\tau_k(m_1) \sum_{1\leqslant m_2\leqslant n} \tau_{k-1}(m_2) \sum_{d/m_1m_2} \sum_{1\leqslant m_3\leqslant\left[\frac{n}{d}\right]} \tau_{k-1}(dm_3) \sum_{\substack{1\leqslant m_r\leqslant n\\(r=4,\ldots,l)}} \tau_{k-1}(m_4)\,\cdot$$

$$\cdot\,\tau_{k-1}(m_5)\ldots\tau_{k-1}(m_l)\left[\frac{n}{K\,(m_1m_2m_3;\,m_4;\,\ldots;\,m_l)}\right],$$

откуда, снова пользуясь (3) и (4), найдем

$$T_k^{(l)}(n) < \sum_{1\leqslant m_1\leqslant n} \tau_{k-1}(m_1)\,\tau_k^2(m_1) \sum_{1\leqslant m_2\leqslant n} \tau_{k-1}(m_2)\,\tau_k(m_2) \sum_{\substack{m_q\leqslant n\\(q=3,\ldots,l)}} \tau_{k-1}(m_3)\ldots\tau_{k-1}(m_l)\,\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{n}{K\,(m_1m_2m_3;\,m_4;\,\ldots;\,m_l)}\right].$$

Продолжая действовать так далее, мы в конечном счете получим:

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_k^l(m) < n \sum_{1\leqslant m_1\leqslant n} \frac{\tau_{k-1}(m_1)\,\tau_k^{l-1}(m_1)}{m_1} \sum_{1\leqslant m_2\leqslant n} \frac{\tau_{k-1}(m_2)\,\tau_k^{l-2}(m_2)}{m_2}\ldots$$

$$\ldots\sum_{1\leqslant m_l\leqslant n} \frac{\tau_{k-1}(m_l)}{m_l}. \tag{5}$$

2. Найдем сейчас оценку $T_k^{(l)}(n)$.

Имеем:

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_2(m) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \sum_{d/m} 1 = \sum_{1\leqslant d\leqslant n} \left[\frac{n}{d}\right] < n \sum_{1\leqslant d\leqslant n} \frac{1}{d} < n\,(\lg n + 1), \tag{6}$$

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_3(m) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \sum_{d/m} \tau_2(m) = \sum_{1\leqslant d\leqslant n} \tau_2(d)\left[\frac{n}{d}\right] < n \sum_{1\leqslant d\leqslant n} \frac{\tau_2(d)}{d}. \tag{7}$$

Суммируя по частям, получим:

$$\sum_{1\leqslant d\leqslant n} \frac{\tau_2(d)}{d} < \frac{1}{2} + \frac{T_2^{(1)}(2)}{2^2} + \frac{T_2^{(1)}(3)}{3^2} + \ldots + \frac{T_2^{(1)}(n-1)}{(n-1)^2} + \frac{T_2^{(1)}(n)}{n},$$

откуда, принимая во внимание, что при $s \geqslant r$

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant n} \frac{(\lg m + s)^r}{m} < \int_1^n \frac{(\lg t + s)^r}{t}\,dt = \frac{(\lg n + s)^{r+1}}{r+1} - \frac{s^{r+1}}{r+1},$$

в виду (6) и (7) следует:

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_3(m) < n\left(\frac{(\lg n + 1)^2}{2} + (\lg n + 1)\right) < n\cdot\frac{(\lg n + 2)^2}{2}.$$

Продолжая те же рассуждения, получим

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_k(m) < n\cdot\frac{(\lg n + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{8}$$

откуда вытекает справедливость теоремы в случае $l = 1$.

3. Предположим теперь, что теорема справедлива для $l < l_1$, тогда

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m)\,\tau_2(m) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m) \sum_{d/m} 1 = \sum_{1 \leqslant d \leqslant n} \sum_{1 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{d}\right]} \tau_k^l(md) <$$

$$< \sum_{d \leqslant n} \tau_k^l(d) \sum_{m \leqslant \left[\frac{n}{d}\right]} \tau_k^l(m) < n \cdot A_k^{(l)} (\lg n + k^l - 1)^{k^l - 1} \cdot \sum_{1 \leqslant d \leqslant n} \frac{\tau_k^l(d)}{d};$$

$$\sum_{1 \leqslant d \leqslant n} \frac{\tau_k^l(d)}{d} < \frac{A_k^{(l)} (\lg n + k^l - 1)^{k^l}}{k^l} + A_k^{(l)} (\lg n + k^l - 1)^{k^l} +$$

$$+ \frac{1}{2} - A_k^{(l)} \frac{(k^l - 1)^{k^l}}{k^l} < \frac{A_k^{(l)} (\lg n + k^l)^{k^l}}{k^l},$$

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m)\,\tau_2(m) < n \cdot \frac{(A_k^{(l)})^2}{k^l} (\lg n + 2k^l - 1)^{2k^l - 1}.$$

Путем индукции находим далее:

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^l(m)\,\tau_p(m) < n \cdot \frac{(A_k^{(l)})^p}{(p-1)!\,k^{(p-1)l}} \cdot (\lg n + pk^l - 1)^{pk^l - 1}. \qquad (9)$$

Полагая $p = k - 1$ и суммируя по частям, получим:

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{\tau_k^l(m)\,\tau_{k-1}(m)}{m} < \frac{(A_k^{(l)})^{k-1}}{(k-1)!\,k^{(k-1)l}} (\lg n + k^{l_1} - 1)^{(k-1)k^l},$$

откуда вытекает, что

$$\prod_{1 \leqslant l \leqslant l_1 - 1} \sum_{1 \leqslant m_l \leqslant n} \frac{\tau_k^l(m_l)\,\tau_{k-1}(m_l)}{m_l} < \frac{(A_k^{(1)} A_k^{(2)} \ldots A_k^{(l_1 - 1)})^{k-1}}{((k-1)!)^{l_1 - 1} k^{\frac{(k-1) l_1 (l_1 - 1)}{2}}} (\lg n + k^{l_1} - 1)^{k^{l_1} - k}$$

Пользуясь неравенствами (5) и (8), окончательно получим:

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k^{l_1}(m) < n \left(\frac{(A_k^{(1)} \ldots A_k^{(l_1 - 1)})^{k-1}}{((k-1)!)^{l_1} k^{\frac{(k-1) l_1 (l_1 - 1)}{2}}} \right) (\lg n + k^{l_1} - 1)^{k^{l_1} - 1}$$

что и доказывает теорему.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
13 I 1939.