Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

ФИЗИКА

В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ

О ФОРМЕ β-СПЕКТРА В СЛУЧАЕ «ЗАПРЕЩЕННЫХ» ПЕРЕХОДОВ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 16 III 1939)

Теория β-распада Ферми ([1]) с видоизмененным по Конопинскому-Уленбеку ([2]) выражением для взаимодействия тяжелых частиц с полем легких дает форму β-спектра, которая хорошо согласуется с опытными данными ([3]) (за исключением впрочем области спектра вблизи граничной энергии). Но необходимо отметить, что опытные данные сравнивались с теоретическим спектром, выведенным для случая «разрешенных» переходов, т. е. таких, при которых момент количества движения распадающегося ядра не меняется (здесь и ниже имеются в виду правила отбора, соответствующие векторному характеру поля легких частиц. Для правил отбора, соответствующих тензорным полям, вопрос обстоит аналогично). В настоящей работе исследуется вопрос о форме β-спектра в случае «запрещенных» переходов, т. е. таких, при которых момент распадающегося ядра изменяется. При фермиевском выражении взаимодействия форма «запрещенного» β-спектра не может значительно отличаться от формы «разрешенного» спектра ([4]) в виду полной симметрии выражения взаимодействия относительно электрона и нейтрино.

Для выражения же взаимодействия Конопинского-Уленбека характерна асимметрия относительно электрона и нейтрино. Эта асимметрия приводит к наблюдаемой на опыте асимметрии β-спектра, но она же, как оказывается, приводит к существенному различию в формах спектра для «разрешенного» и «запрещенного» случаев, что не согласуется с опытом.

Схема расчета. Форма β-спектра в теории Конопинского-Уленбека дается следующим выражением:

$$P(w)\,dw = \frac{2\pi mc^2}{h} G^2 \sum \left| \int (\Phi^* \alpha_i \psi) \left(\varphi^* \beta \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right) d\tau \right|^2 dw. \tag{1}$$

Здесь $P(w)\,dw$ — вероятность вылета электрона с энергией от w до $w+dw$, ψ — волновая функция исходного ядра, Φ — волновая функция конечного состояния ядра, отличающаяся от исходного тем, что один определенный нейтрон превратился в протон, излучив электрон и антинейтрино с суммарной энергией w_0. Учет числа нейтронов в ядре, их тождественности и неразличимости нейтронов и протонов внутри ядра приводит лишь к неинтересующему нас здесь численному фактору ([5]); $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — дираковские матрицы, действующие на переменные того нейтрона, который превращается в протон; по i производится суммирование от 1 до 4, $\alpha_4 = -i$; φ — волновая функция испущенного электрона и χ — волновая функция поглощенного с уровня отрицательной энергии нейтрино, нормированные на единичный интервал энергии, β — дираковская матрица, действующая на переменные нейтрино; $x_4 = ict$ — интегрирование производится по переменным ядра, суммирование — по различным состояниям электрона с энергией w. G — безразмерная универсальная постоянная.

Существенным для расчета является тот факт, что размеры ядра малы по сравнению с длиной волны испускаемых частиц. Это позволяет произвести разложения волновых функций легких частиц по $\frac{r}{\lambda}$, ограничиваясь первым неравным нулю членом. Кроме того можно воспользоваться нерелятивистским приближением для волновых функций ядра. Легко показать, что для этого, как и в случае одной частицы, достаточно читать в (1) дираковские четырехрядные функции ψ и Φ, как паулиевские двухрядные, и заменить $\vec{\alpha}$ на $-\frac{\vec{v}}{c}$, где $\vec{v}$ — оператор скорости $\vec{v} = -\frac{iw_0 \vec{r}}{\hbar}$ (w_0 — разность энергий ядра в начальном и конечном состоянии). Отсюда видно, что для того, чтобы все члены в (1) были одного порядка, надо в членах, содержащих компоненты $\vec{\alpha}$, оставлять в разложении $\varphi^* \beta \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$ величины порядка, на единицу меньшего в r, чем в членах, содержащих α_4.

Легкие частицы мы рассматриваем в состоянии с определенным моментом количества движения. Тогда волновая функция представляется в виде произведения угловой части на радиальную ([6]):

$$\psi_1 = i\sqrt{\frac{l-m+\frac{3}{2}}{2l+3}}\, y_{l+1,\, m-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) f_k(r),$$

$$\psi_2 = i\sqrt{\frac{l+m+\frac{3}{2}}{2l+3}}\, y_{l+1,\, m+\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) f_k(r),$$

$$\psi_3 = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, y_{l,\, m-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) g_k(r),$$

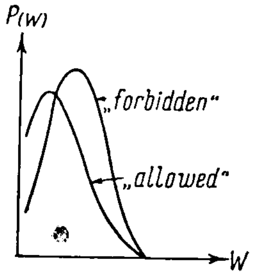
$$\psi_4 = -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, y_{l,\, m+\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) g_k(r).$$

l и m — азимутовые и магнитные квантовые числа, y — шаровая функция $k = -(l+1)$ при $j = l + \frac{1}{2}$, $k = l$ при $j = l - \frac{1}{2}$; j — внутреннее квантовое число. Для радиальной части электронной функции воспользуемся решением уравнения Дирака для сплошного спектра в кулоновском поле ([7]), для нейтринной (поле отсутствует, масса — 0) радиальные функции имеют вид:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varepsilon\, \frac{I_{\left|k+\frac{1}{2}\right|}(\varepsilon r)}{\sqrt{\varepsilon r}}, \qquad f_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varepsilon\, \frac{I_{\left|k-\frac{1}{2}\right|}(\varepsilon r)}{\sqrt{\varepsilon r}}.$$

Здесь ε — энергия нейтрино в единицах mc^2, r — в единицах $\frac{\hbar}{mc}$, m — масса электрона, I — функция Бесселя.

Если разложение величины $\varphi^*\beta\frac{\partial\chi}{\partial t}$ начинается с нулевой степени r, то (1) будет зависеть от ядерных состояний через величину $M=\int\psi^*\Phi d\tau$, определяющую правила отбора $\Delta j=0$ (разрешенный переход). Для этого надо взять комбинацию легких частиц в следующих состояниях (табл. 1).



Фиг. 1.

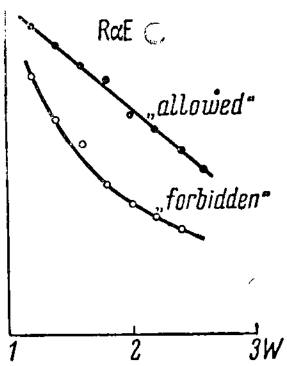
Таблица 1

Спектроскопические символы состояний	
Электрона	Нейтрино
$S_{\frac{1}{2}}$	$S_{\frac{1}{2}}$
$P_{\frac{1}{2}}$	$P_{\frac{1}{2}}$

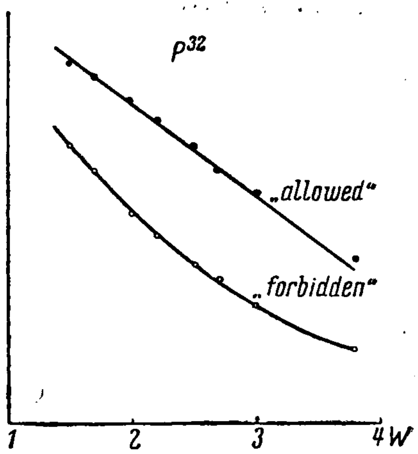
Для «запрещенных» переходов, для которых (1) содержит $D=\int\psi^*x\Phi d\tau$, надо взять те состояния легких частиц, для которых разложение $\varphi^*\beta\frac{\partial\chi}{\partial t}$ начинается с первой степени r $\left(\text{а } \varphi^*\beta\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\text{ — с нулевой}\right)$. Таковы следующие комбинации (табл. 2).

Таблица 2

Спектроскопические символы состояний	
Электрона	Нейтрино
$S_{\frac{1}{2}}$	$P_{\frac{1}{2}}$
$P_{\frac{1}{2}}$	$S_{\frac{1}{2}}$
$S_{\frac{1}{2}}$	$P_{\frac{3}{2}}$
$P_{\frac{1}{2}}$	$d_{\frac{3}{2}}$
$P_{\frac{3}{2}}$	$S_{\frac{1}{2}}$
$d_{\frac{3}{2}}$	$P_{\frac{1}{2}}$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Подставив разложения волновых функций легких частиц этих состояний в (1), мы получим (энергия электрона w и граница спектра w_0 в единицах mc^2):

$$P(w)=\frac{4}{9\pi^3}G^2|D|^2(w_0-w)^4 w\sqrt{w^2-1}\left\{F_1(z,w)\left(3w^2-\frac{3}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+F_2(z,w)(w^2-1)\right\}\frac{mc^2}{\hbar}. \qquad (2)$$

Здесь

$$F_1(z, w) = \frac{e^{\pi\alpha\frac{w}{p}}}{|\Gamma(1+2\sqrt{1-\alpha^2})|^2}\left|\Gamma\left(\sqrt{1-\alpha^2}+i\alpha\frac{w}{p}\right)\right|^2(2p\rho)^{2(\sqrt{1-\alpha^2}-1)},$$

$$F_2(z, w) = \frac{e^{\pi\alpha\frac{w}{p}}}{|\Gamma(1+\sqrt{4-\alpha^2})|^2}\left|\Gamma\left(\sqrt{4-\alpha^2}+i\alpha\frac{w}{p}\right)\right|^2(2p\rho)^{2(\sqrt{4-\alpha^2}-2)}$$

$\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar c}$, Z — заряд ядра, $p = \sqrt{w^2-1}$, ρ — радиус ядра в единицах $\frac{\hbar}{mc}$, F_1 соответствует состояниям электрона с $j = \frac{1}{2}$; F_2 с $j = \frac{3}{2}$. Для малых Z (2) переходит в

$$P(w) = \frac{5mc^2}{18\hbar} G^2 |D|^2 (w_0 - w)^4 w\sqrt{w^2-1}\left(\frac{8}{5}w^2 - 1\right). \tag{3}$$

Сравнение с экспериментом. На фиг. 1 приведены теоретические спектры разрешенного и «запрещенного» типов легкого элемента с $w_0 = 4mc^2$. Форма «запрещенного» спектра существенно отличается от разрешенного. Между тем характерным опытным фактом является стандартность формы β-спектра у всех легких элементов. Для сравнения с опытом мы возьмем данные Алиханьяна и Завельского([8]) о RaE и Лаймана([9]) о P^{32}, элементов, распад которых относится повидимому к типу «запрещенных». Результаты приведены на фиг. 2 и 3. По оси абсцисс отложена энергия электрона, по оси ординат — решение относительно $(w_0 - w)$ уравнения (2). Экспериментальные точки не укладываются на прямую линию, что означает несогласие с теорией. Для сравнения рядом приведены аналогичные графики, построенные по формуле разрешенного спектра.

Захват k-электрона. Расчет захвата k-электрона ядром можно провести по такой же схеме. В выражение (1) следует при этом подставить в качестве волновых функций электрона функции k-электрона.

Сопоставим отношение вероятностей захвата k-электрона и позитронного распада для «запрещенных» переходов с аналогичным для разрешенных переходов, рассмотренных Моллером([10]) (рассмотрим только случай легких ядер).

Для разрешенных переходов полная вероятность распада дается формулой

$$P_\beta^a = \frac{G^2}{2\pi^3}|M|^2 F_\beta^a,$$

где

$$F_\beta^a = \int_1^{w_0}(w_0 - w)^4 w\sqrt{w^2-1}\,dw = \left(\frac{w_0^3}{2}+\frac{w_0}{4}\right)\ln(p_0 + w_0) +$$

$$+\frac{p_0^7}{3\cdot5\cdot7} - \frac{p_0^5}{3\cdot5} - \frac{3p_0^3}{4} - \frac{3p_0}{4}, \quad (p_0 = \sqrt{w_0^2-1}),$$

а вероятность захвата k-электрона (считая приближенно энергию k-электрона равной mc^2)

$$P_k^a = \frac{2G^2}{\pi^2}|M|^3(w_0+1)^4 F_k,$$

где

$$F_k = \frac{(Z\alpha)^3}{\Gamma(3+2s)}\left(\frac{2\rho}{a_0}\right)^{2s} e^{-\frac{2\rho}{a_0}}.$$

Здесь Z — заряд ядра; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$; $s = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2} - 1$; ρ — радиус ядра в единицах $\frac{\hbar}{mc}$; $a_0 = \frac{1}{Z\alpha}$.

Для «запрещенных» переходов вероятность распада:

$$P^f_\beta = \frac{5}{18\pi^3} G^2 |D|^2 F^f_\beta,$$

где

$$F^f_\beta = \int\limits_1^{w_0} (w_0 - w)^4 w \sqrt{w^2 - 1} \left(\frac{8}{5} w^2 - 1\right) dw =$$

$$= \left(\frac{w_0^3}{4} + \frac{5w_0}{12}\right) \ln (p_0 + w_0) + \frac{P_0^9}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{P_0^7}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{P_0^5}{15 \cdot 16} - \frac{P_0^3}{3 \cdot 32} - \frac{13 P_0}{12}$$

и вероятность захвата

$$P^f_k = \frac{2G^2}{3\pi^2} |D|^2 (w_0 + 1)^4 F_k.$$

Отношение вероятностей захвата и распада остается при данном Z одного порядка как для разрешенного, так и «запрещенного» переходов, несколько изменяясь при «запрещенном переходе в пользу распада:

$$\frac{P^f_k}{P^f_\beta} : \frac{P^a_k}{P^a_\beta} = 3 \frac{F^a_\beta}{F^f_\beta}.$$

Отношение $\frac{F^a_\beta}{F^f_\beta}$ для $w_0 = 4.12$ составляет 0.15.

Сравнить отношение вероятностей распада и захвата с опытными данными пока невозможно, ибо захват k-электрона и позитронный распад у одного и того же элемента до сих пор не наблюдались.

Работа Хойла, посвященная расчету β-спектров при «запрещенных» переходах, содержит вычислительную ошибку, существенно искажающую результат. Происхождение этой ошибки легко уяснить, если производить расчет, пользуясь в качестве волновых функций легких частиц плоскими волнами и разлагая их в ряд. Кроме множителей типа $e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}$ эти функции содержат множители, представляющие собой столбцы из четырех чисел. Они дают в выражении вероятности фактор, который после суммирования по спиновым состояниям сводится к следу некоторой комбинации дираковских матриц. Этот фактор упущен Хойлом.

Выражаю благодарность А. И. Алиханьяну за инициативу в постановке данной работы и проф. И. Е. Тамму за ряд ценных указаний.

Физико-технический институт.
Ленинград.

Поступило
21 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Fermi, ZS. f. Phys., 88, 161 (1934). [2] E. J. Konopinski a. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev., 48, 7 (1935). [3] Алиханьян, Изв. Акад. Наук СССР, Серия физич., № 1—2, стр. 135 (1938). [4] K. L. Dobcek, Phys. Rev., 48, 13 (1935). [5] L. W. Nordheim a. F. L. Yost, Phys. Rev., 51, 942 (1937). [6] Бете, Квантовая механика простых систем, стр. 158. [7] M. E. Rose, Phys. Rev., 51, 484 (1937). [8] Алиханьян и Завельский, ДАН, XVIII, 463 (1937). [9] E. M. Lyman, Phys. Rev., 51, 1 (1937). [10] Møller, Sow. Phys., 11, 9 (1937). [11] F. Hoyll, Proc. Roy. Soc., 166, 249 (1937).