Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

АСТРОФИЗИКА

А. И. ЛЕБЕДИНСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ КОНВЕКЦИОННЫМИ ТОКАМИ В ЗВЕЗДЕ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 23 III 1939)

Зидентопф [1], строя теорию солнечной грануляции, и Бирман [2], занимаясь вопросом о конвекции в недрах и атмосферах звезд, используют выводимое в теории турбулентности уравнение переноса энергии

$$H_k = C_p \rho v l \left[\left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} - \frac{dT}{dz} \right]. \qquad (1)$$

Здесь C_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность, $\frac{dT}{dz}$ — температурный градиент, v — скорость, а l — «длина пути смещения» (Mischungsweg) конвекционных токов. Состояние звезды предполагается при этом стационарным, и общий поток энергии $(H_0 = H_k + H_R)$ равен сумме потоков, переносимых конвекцией и радиацией. При выводе уравнения (1) в теории турбулентности существенно предположение о том, что ускорения, испытываемые конвекционными токами, не зависят от количества переносимой ими тепловой энергии [см. например статью Келлера [3]]. Это приблизительно верно, если рассматривается перенос теплоты вихрями, возникающими в потоке жидкости или газа, но неверно в случае термической конвекции, обусловленной наличием неустойчивости. Ниже мы выводим для случая термической конвекции уравнение более точное, чем (1), из которого (1) получается в результате осреднения.

Изотермические и изобарические поверхности мы будем считать параллельными плоскостями. Ось z прямоугольной системы координат (x, y, z) ориентируем перпендикулярно к ним. z возрастает в направлении от центра звезды. Обозначим через U_x, U_y, U_z компоненты вектора скорости $\vec{U}$, а через T, p и ρ температуру, давление и плотность. Буквами с чертой ($\overline{U}_x$, $\overline{T}$ и т. д.) обозначим средние на данной высоте z значения величин U_x, T и т. д., а через $\overset{+}{U}_x$, $\overset{+}{T}$ и т. д. средние значения тех же величин в восходящих токах, т. е. в точках, где $U_z > 0$. $\overline{U}_x$, $\overline{T}$, $\overset{+}{U}_x$, $\overset{+}{T}$, вообще говоря, — функции z и времени t, а в случае стационарного состояния атмосферы — одного только z.

Мы предположим, что общей циркуляции в звезде нет и

$$\overline{\rho U_x} = \overline{\rho U_y} = \overline{\rho U_z} = 0.$$

Газ идеальный, и поэтому $p = \frac{R}{\mu} T \rho$ и $C_p - C_v = \frac{R}{\mu}$. Пренебрегая лучевым давлением по сравнению с газовым, напишем уравнение Эйлера в виде:

$$\operatorname{grad} p + \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{X}\rho = 0,$$

где

$$X_x = X_y = 0, \quad X_z = g. \tag{2}$$

Считая, что коэффициент поглощения k одинаков для радиации всех частот, напишем уравнение закона сохранения энергии

$$k\int I\,d\omega - 4\pi k B = J = C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}. \tag{3}$$

Здесь $\int I\,d\omega$ — плотность лучистой энергии, $B = \frac{\sigma}{\pi}T^4$ — излучение черного тела. Заменим в (3) производные $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ их выражениями, определенными уравнениями (2). Получившееся громоздкое выражение упростим, воспользовавшись уравнением непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}\rho) = 0$, и придадим ему вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(C_v T + M)] + g\rho U_z + \operatorname{div}\{\rho\vec{U}[C_p(\overline{T} + \delta) + M]\} = \rho J. \tag{4}$$

В последнем члене левой части вместо T подставлено $\overline{T} + \delta = T$. Введено обозначение $M = \frac{1}{2}(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)$.

Умножим теперь обе части (4) на $dx\,dy$ и проинтегрируем двумя способами: один раз распространим интеграл по достаточно большому участку горизонтальной плоскости; второй раз лишь по той части этого участка, где $U_z > 0$, т. е. внутри восходящих токов. Разделив каждый из интегралов на ту площадь, по которой он был распространен, получим два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{[\rho(C_v T + M)]} - C_p\overline{T}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{[\rho U_z(C_p\delta + M)]} = \rho\overline{J}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{[\rho(C_v T + M)]}^{+} - C_p\overline{T}\,\frac{\partial\overline{\rho}^{+}}{\partial t} + \overline{\rho U_z}^{+}\left[g + C_p\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right] +$$

$$+ \overline{\operatorname{div}[\vec{U}_{\mathrm{hor}}\rho(C_p\delta + M)]}^{+} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{[\rho U_z(C_p\delta + M)]}^{+} = \overline{\rho J}^{+}. \tag{6}$$

Через $\vec{U}_{\mathrm{hor}}$ обозначен горизонтальный вектор с компонентами (U_x, U_y). В (5) знаки дифференцирования вынесены из-под черты осреднения потому, что пределы интегрирования не зависели от z и t. Обозначим отношение площади точек, в которых $U_z > 0$, к площади точек, в которых $U_z < 0$, через φ. Тогда последний член левой части (5) можно заменить выражением: $\frac{1+\varphi}{\varphi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi}{1+\varphi}\overline{\rho U_z(C_p\delta + M)}^{+}\right]$, так как границами интегрирования служили линии $U_z = 0$.

Предположим, во-первых, что состояние атмосферы стационарно, и поэтому все средние зависят только от z, во-вторых, что $H_0 = H_k + H_r$, и, в-третьих, что не происходит истечения материи из звезды, и следовательно при возрастании z вектор $\rho\vec{U}$ стремится к нулю. Интегрируя (5) от z до ∞, получим:

$$\overline{\rho U_z(C_p\delta + M)} = -\int_z^\infty \rho\overline{J}\,d\xi = H_k. \tag{5a}$$

Уравнение (1) — частный случай (6). Чтобы показать это, введем шесть упрощающих предположений:

1) средними значениями производных по времени можно пренебречь;
2) $\varphi = \text{const}$;
3) $\overline{\rho U_z \delta}^{+} \approx \overline{\rho U_z}^{+}\, \overline{\delta}^{+}$; $\overline{\rho U_z \delta} \approx \varphi\, \overline{\rho U_z}^{+}\, \overline{\delta}^{+}$;
4) $C_p \dfrac{\partial}{\partial z} \overline{[\rho U_z \delta]}^{+} \gg \overline{\operatorname{div} [\rho U_{\text{hor}} (C_p \delta + M)]}^{+}$;
5) $C_p\, \overline{\rho U_z \delta}^{+} \gg \overline{\rho U_z M}^{+}$; $C_p\, \rho \overline{U_z \delta} \gg \rho \overline{U_z M}$;
6) $\overline{\rho J} \approx \overline{\rho J}^{+}$.

Предположения 3) и 4) вполне уместны в случае, когда поверхности $\delta = 0$ можно считать совпадающими с поверхностями $U_z = 0$, а предположение 6) — в случае, когда оптическая толщина токов значительно больше единицы, а разность средних потоков радиации в восходящих и в нисходящих токах мала по сравнению с H_r. Если, наоборот, оптическая толщина токов мала по сравнению с единицей, то

$$\overline{J}^{+} = \overline{J} + 4\pi k (\overline{B} - \overline{B}^{+}).$$

В силу предположений 3) и 5) вместо уравнения (5а) получим:

$$H_k = \varphi C_p\, \overline{\rho U_z}^{+}\, \overline{\delta}^{+}, \tag{7}$$

а, используя все предположения, вместо (6) получим:

$$\overline{\rho U_z}^{+} \left[g + C_p \frac{d\overline{T}}{dz} \right] + C_p \frac{d}{dz} [\overline{\rho U_z}^{+}\, \overline{\delta}^{+}] = \overline{\rho J}^{+} = \frac{dH_k}{dz}. \tag{8}$$

Интегрируя (8) с учетом (7), получим:

$$C_p \int\limits_{z_0}^{z} \overline{\rho U_z}^{+} \left[\left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} - \frac{dT}{dz} \right] d\xi = C_p\, \overline{\rho U_z}^{+}\, \overline{\delta}^{+} - H_k = \left(\frac{1}{\varphi} - 1 \right) H_k, \tag{9}$$

где z_0 — высота нижней границы конвекционного слоя. Если же таковой не существует, то вместо стоящего справа интеграла нужно написать интеграл той же функции от ∞ до z. Если в неустойчивом слое подинтегральная функция положительна и если z_0 совпадает с нижней границей неустойчивого слоя, то φ должно быть меньше единицы.

Если вместо дифференциального уравнения (9) воспользоваться алгебраическим соотношением между осредненными по высоте z в пределах неустойчивого слоя значениями входящих в него функций, то получится уравнение (1). «Длине пути смешения» l будет соответствовать произведение толщины слоя на безразмерный множитель, пропорциональный $\dfrac{\varphi}{1-\varphi}$.

В цитированных выше работах было установлено, что при наличии конвекции градиент температуры вблизи поверхности звезды определяется условиями лучевого равновесия, а в глубоких слоях практически равен адиабатическому. Эти заключения могут быть получены на основании (5) и (6), поэтому правильность их несомненна.

Введенные выше предположения при внимательном их рассмотрении кажутся значительно более естественными и убедительными, чем на первый взгляд, но тем не менее уравнение (9) является весьма грубым приближением.

Астрономическая обсерватория
Ленинградского государственного университета.

Поступило
23 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Siedentopf, Astr. Nachr., **247**, 297; **249**, 53; **255**, 157. [2] Biermann, Astr. Nachr., **264**, 361; ZS. f. Astrophys., **5**, 117. [3] Келлер, Известия Главной геофизической обсерватории, № 4 (1931).