Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МЕХАНИКА

Н. М. РИЗ

ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО-ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 III 1939)

В этой части нашей работы* мы рассматриваем кручение естественно-закрученного стержня силами, распределенными по торцевому сечению и статически эквивалентными крутящей паре с моментом *Mo*.

Напоминаем, что в ненапряженном состоянии сечения стержня повернуты друг относительно друга на угол $\alpha(z)$. Мы ограничиваемся случаем $\alpha(z) = \theta z$ и требуем удовлетворения уравнений теории упругости с точностью до θ^2.

Напоминаем, что наряду с основной системой координат x, y, z, начало которой помещено в центре тяжести одного из сечений, мы пользуемся поворачивающимися вместе с сечениями координатными осями ξ, η, ζ. Последние координаты связаны с основными следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ \eta &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ \zeta &= z \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Уравнение боковой поверхности стержня в этих координатах — $f(\xi, \eta) = 0$.

Зададимся следующими выражениями для перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + \tau\theta u^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) \\ v &= \tau xz + \tau\theta v^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) \\ w &= \tau\varphi(\xi, \eta) + \tau\theta w^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Здесь φ — функция кручения для контура $f(\xi, \eta) = 0$; $\tau = \frac{M_0}{\mu T}$. T — геометрическая жесткость кручения соответствующего призматического стержня.

Тогда для напряжений мы получим:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \lambda\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{xx}^{(1)}; \quad \sigma_{yy} = \lambda\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{yy}^{(1)} \\ &\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{zz}^{(1)}; \quad \sigma_{xy} = \tau\theta\sigma_{xy}^{(1)} \\ &\sigma_{xz} = \mu\tau(\varphi'_\xi - y) + \mu\tau\theta z\varphi'_\eta + \tau\theta\sigma_{xz}^{(1)}; \quad \sigma_{yz} = \mu\tau(\varphi'_\eta + x) - \mu\tau\theta z\varphi'_\xi + \tau\theta\sigma_{yz}^{(1)} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

$$H = \xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi$$

* См. 1-ю часть—ДАН, XXII, № 9 (1939).

Для неизвестных добавочных напряжений получим следующие уравнения равновесия:

$$L_1^{(1)}+(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial \xi}=0;\quad L_2^{(1)}+(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial \eta}=0;\quad L_3^{(1)}=0, \tag{4}$$

Здесь

$$L_1^{(1)}=\frac{\partial \sigma_{xx}^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xy}^{(1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial \zeta}.$$

Условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{xy}^{(1)}f_\eta+\lambda Hf'_\xi+\mu(\varphi'_\xi-\eta)(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)=0\\&\sigma_{xy}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yy}^{(1)}f'_\eta+\lambda Hf'_\eta+\mu(\varphi'_\eta+\xi)(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)=0\\&\sigma_{xz}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yz}^{(1)}f'_\eta=0\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Эти уравнения представляют формально некоторую задачу об упругом равновесии под действием объемных и поверхностных сил.

Соответствующие условия совместности имеют вид:

$$\nabla^2\sigma_{xx}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\xi^2}\frac{1}{1+\nu}=-2\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi^2};\ \nabla^2\sigma_{xy}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=$$

$$=-2\,(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi\partial\eta};$$

$$\nabla^2\sigma_{yy}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\eta^2}\frac{1}{1+\nu}=-2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2};\ \nabla^2\sigma_{xz}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\xi\partial\zeta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=0;$$

$$\nabla^2\sigma_{zz}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\zeta^2}\frac{1}{1+\nu}=0;\qquad \nabla^2\sigma_{yz}^{(1)}+\frac{\partial^2\sum^{(1)}}{\partial\eta\partial\zeta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=0,$$

где

$$\sum^{(1)}=\sigma_{xx}^{(1)}+\sigma_{yy}^{(1)}+\sigma_{zz}^{(1)}. \tag{6}$$

Все условия удовлетворяются при следующем выборе дополнительных напряжений:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xz}^{(1)}=0;\quad \sigma_{yz}^{(1)}=0\\&\sigma_{xx}^{(1)}=-(\lambda+\mu)H+\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\\&\sigma_{yy}^{(1)}=-(\lambda+\mu)+\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}\\&\sigma_{xy}^{(1)}=-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}=\nu\nabla^2F-2(\lambda+\mu)H+A\xi+B\eta+C,$$

где F — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^4F=0 \tag{8}$$

и контурным условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}f'_\xi-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}f'_\eta=\mu Hf'_\xi-\mu(\varphi'_\xi-\eta)\ (\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)\\&-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}f'_\xi+\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}f'_\eta=\mu Hf'_\eta-\mu(\varphi'_\eta+\xi)(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Приводим выражения для полной системы напряжений:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \mu\tau(\varphi'_\xi - \eta) + \mu\tau\theta z(\varphi'_\eta + \xi)\\
\sigma_{yz} &= \mu\tau(\varphi'_\eta + \xi) - \mu\tau\theta z(\varphi'_\xi - \eta)\\
\sigma_{xx} &= -\mu\tau\theta\left\{H + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right\}\\
\sigma_{yy} &= -\mu\tau\theta\left\{H + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}\right\}\\
\sigma_{xy} &= -\tau\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}\\
\sigma_{zz} &= \tau\theta\{\nu\nabla^2 F + A\xi + B\eta + C\}
\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Константы A, B и C определяются из интегральных соотношений на торцевой поверхности, выражающих статическую эквивалентность напряжений крутящей паре:

$$\iint\sigma_{zz}\,d\xi d\eta = \iint\xi\sigma_{zz}d\xi d\eta = \iint\eta\sigma_{zz}d\xi d\eta = 0 \tag{11}$$

Заметим также, что выполняются требования

$$\iint\sigma_{xz}d\xi d\eta = \iint\sigma_{yz}d\xi d\eta = 0; \quad \iint(x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\,d\xi d\eta = M_0 \tag{12}$$

и получается обычное выражение для геометрической жесткости на кручение

$$T = \iint(\xi^2 + \eta^2 + \xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi)\,d\xi d\eta. \tag{13}$$

(В теории тонких стержней Кирхгофа последний результат прямо постулируется.)

Для перемещений легко получается следующий результат:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\tau yz + \tau\theta\bar{u}(\xi, \eta)\\
v &= \tau xz + \tau\theta\bar{v}(\xi, \eta)\\
w &= \tau\varphi(\xi, \eta) + \tau\theta z(\beta x + \gamma y + \alpha)
\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Константа α определяется через постоянную C следующим образом:

$$\alpha = \frac{C}{2(\lambda + \mu)}, \quad \beta = \frac{A}{2(\lambda + \mu)}, \quad \gamma = \frac{B}{2(\lambda + \mu)}. \tag{15}$$

Эти равенства показывают, что перемещения слагаются: 1) из обычного кручения; 2) некоторой дополнительной «плоской» деформации, определяемой функциями $\bar{u}$ и $\bar{v}$; 3) осевого растяжения или сжатия, характеризуемого константой α, причем сжатие имеет место в том случае, когда упругое кручение направлено в ту же сторону, что и естественная закрученность; 4) некоторого дополнительного искажения поперечных сечений, зависящего от z.

Заметим, что для того, чтобы осуществить изученную здесь деформацию, следует определенным образом распределить по торцевому сечению внешние силы; мы полагаем однако согласно принципу Сен-Венана, что в случае иного распределения сил отклонения от найденной деформации будут иметь характер местных возмущений.

Интересно отметить также известное сходство между деформацией кручения естественно-закрученного стержня и так называемой большой деформацией кручения, т. е. деформацией, при которой нельзя уже пользоваться линейными соотношениями теории упругости.

При такого рода деформациях, изученных автором настоящей работы для круглого цилиндра ([2]) и Д. Ю. Пановым ([3]) для цилиндра эллиптического, закручивание также сопровождается осевым сжатием и некоторыми добавочными деформациями, по характеру схожими с добавочными деформациями, возникающими при кручении естественно-закрученного стержня.

В этой связи интересно отметить, что энергия деформации с точностью до θ^2 определяется в нашем случае величиной:

$$A = \frac{1}{2}\mu T\tau^2 + \tau \iint \sigma_{zz}\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Легко показать, что для контуров, обладающих центром симметрии, последний интеграл равен нулю, если ось закручивания проходит через центр симметрии, в противном случае этот интеграл может быть отличен от нуля, и величина его зависит, вообще говоря, от выбора той оси, вокруг которой происходит как естественное, так и упругое закручивание.

В данном исследовании, как уже указывалось, эта ось принималась проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

Поступило
21 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. М. Риз, ДАН, XXII, № 9 (1939). [2] П. М. Риз, ДАН, XX, № 3—4 (1938). [3] Д. Ю. Панов, ДАН, XXII, № 4 (1939).