Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 III 1939)

Хорошо известно, что в математике имеются способы доказывать теоремы существования, не прибегая к построению объекта, существование которого доказывается. Во многих случаях доказательство существования нисколько не помогает в подобном построении.

В настоящей статье рассматриваются теоремы существования следующего типа: пусть $F(n)$ есть некоторое высказывание о целом числе, истинность или ложность которого проверяема регулярным образом конечным числом операций для всякого фиксированного числа [например $F(n)$ есть утверждение, что число n есть простое, совершенное и т. д.]. Пусть доказано существование числа n, для которого $F(n)$ истинно; является вопрос, возможны ли в таких условиях методы, позволяющие извлечь это данное число совершенно эффективно. Нам представляется, что такие методы действительно возможно найти при очень широких условиях.

Конечно, может случиться, что в некотором логическом исчислении, непротиворечивость которого не доказана, могут иметь место доказательства, не дающие указания числа n, но вероятно с доказательством непротиворечивости исчисления немедленно последует и указание числа n.

Настоящая статья содержит изложение следующих результатов:

1) построение достаточно мощного логического исчисления, в котором вопрос о суждении $F(n)$ ставится совершенно четко;

2) решение указанного выше вопроса в положительном смысле для данного исчисления.

В рассматриваемом логическом исчислении мы имеем буквы в счетном числе A, B, C и т. д. и формулы, определяемые следующим образом:

1. Каждая буква есть формула.
2. Если F есть формула, (F) также и обратно.
3. Если $F_1, F_2, \dots F_n, \dots$ есть конечная или интуиционистски развертывающаяся последовательность формул, то $(F_1)\cdot(F_2)\dots(F_n)\dots$ и $(F_1)+(F_2)+\dots+(F_n)+\dots$ будут формулы *.

* В данных обозначениях знак произведения имеет смысл «и», а знак суммы—«или».

4. Если F — формула, то и $\bar{F}$ также формула (знак следования мы здесь не вводим, роль формулы $F \to G$ будет играть $\overline{F} + G$).

Очевидно обычное исчисление суждений составляет часть данного. Мы будем относительно состава формул допускать любые содержательные рассуждения, ограничивая их только естественно рамками интуиционистских требований.

Правило вывода или образования истинных формул состоит в следующем.

Истинными формулами являются все содержательно истинные формулы логики суждений.

1. Правило подстановки:

Если $F(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ — истинная формула, то $F(G_1, G_2, \ldots, G_n \ldots)$, где A_n заменено на G_n, также истинная формула.

2. Если $\bar{F}_n + G_n$ — последовательность истинных формул, то $\bar{F} + (G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n \ldots)$ также истинная формула.

3. Если $\overline{G_n} + F$ — последовательность истинных формул, то $\overline{G_1 + G_2 + \ldots G_n + \ldots} + F$ также истинная формула.

4. Правило следования:

Если F и $\overline{F} + G$ — истинные формулы, G — также истинная формула.

5. Выражение вида $F_1 \cdot F_2, \ldots F_n \ldots$ и выражение $(F_{n_{11}} \cdot F_{n_{12}} \ldots) \times \times (F_{n_{21}} \ldots) \ldots$, где n_{ij} пробегает все целые числа, являющиеся индексами F, истинны одновременно точно так же и для знака $+$.

6. В выражении вида $(F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \ldots)$ можно изменить порядок членов F_n, тоже для знака $+$.

Введем понятие нормальной формулы. Мы будем считать каждую букву и ее отрицание нормальной формулой. Так же если F_n являются нормальными формулами и имеют вид $(F_{n1}) + (F_{n2}) + \ldots + (F_{nk}) + \ldots$, то $(F_1) \cdot (F_2) \cdot \ldots \cdot (F_n) \ldots$ будет нормальной формулой, и если F_n имеет вид $(F_{n1}) \cdot (F_{n2}) \cdot \ldots \cdot (F_{nk}) \ldots$, то $(F_1) + (F_2) + \ldots + (F_n) + \ldots$ будет нормальная формула. Каждую формулу можно привести к нормальному виду уничтожением скобок и для каждой формулы имеется соответствующая нормальная, ей эквивалентная, в том смысле, что если истинна одна, то также истинна и другая.

Введем понятие регулярности формул.

Это понятие мы будем определять для нормальных формул. Формулу же, не являющуюся нормальной, мы будем называть регулярной, если соответствующая ей нормальная формула регулярна. Для нормальных формул определение регулярности следующее. Формулы вида $A + \overline{A}$ регулярны.

Нормальная формула $F_1 \cdot F_2, \ldots \cdot F_n \cdot \ldots$ регулярна, если каждая из формул F_n регулярна. Будем называть совокупность формул F_n определяющей системой формулы $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \cdot \ldots$ Нормальная формула $F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots$, где F_n имеет вид $(F_{n1} \cdot F_{n2} \cdot \ldots)$, регулярна, если регулярны следующие формулы:

$$\begin{array}{l} F_{r1} + F_{n_{11}} + F_{n_{12}} + \ldots \\ F_{r_2} + F_{n_{21}} + F_{n_{22}} + \ldots \\ \vdots \\ F_{rk} + F_{n_{k1}} + F_{n_{k2}} + \ldots, \end{array}$$

где n_{pq} и k произвольные индексы, а r — вполне определенное число. Совокупность приведенных формул будем называть определяющей системой формулы $F_1 + F_2 + \ldots F_n + \ldots$

Определение регулярных формул дает возможность выводить их свойства индуктивным способом. Именно для того, чтобы установить, что все регулярные формулы обладают данным свойством, достаточно показать, что формулы вида $A+\bar{A}$ обладают этим свойством, затем из предположения, что формулы определяющей системы обладают данным свойством, достаточно доказать, что и сама формула F обладают данным свойством.

Можно показать, что:

Теорема 1. *Все регулярные формулы истинны в приведенном выше смысле.*

Теорема 2. *Все истинные формулы являются регулярными.*

Первое положение доказывается очень легко.

Обратное утверждение доказывается тем, что, устанавливая регулярность формул конечного логического исчисления, затем оказывается, что, применяя правила вывода к регулярным формулам, мы получаем опять регулярные. Из этих теорем немедленно вытекает непротиворечивость исчисления, иначе говоря, невозможность доказать одновременно две формулы F и $\bar{F}$. Если бы мы имели противоречие, то могли бы доказать любую формулу, применяя правила вывода например A. Но легко показать по индукции, что никакая регулярная формула не может состоять из одной буквы, и следовательно A не может быть регулярной и потому на основании теоремы 2 не может быть выведена правилами исчисления.

Поставленный выше вопрос о теоремах существования некоторого типа в данном исчислении получает точную формулировку, именно предположим, что доказана формула $F_1+F_2+\ldots F_n+\ldots$, где каждая формула F_n есть формула конечного исчисления. Можно ли найти такое N, что $F_1+F_2+\ldots F_N$ также истинная формула? На основании теоремы 2 этот вопрос получает положительное решение.

Пусть доказана формула $F_1+F_2+\ldots F_n+\ldots$, относительно которой мы будем предполагать, что она нормальна. Так как она должна быть регулярной, то найдется такое число r, что

$$F_{r1}+F_{n_{11}}+F_{n_{12}}+\ldots$$
$$\vdots$$
$$F_{rk_r}+F_{n_{k_r1}}+F_{n_{k_r2}}+\ldots$$

также регулярны. Ясно, что все формулы данной определяющей системы будут того же типа, что и сама формула $F_1+F_2+\ldots F_n+\ldots$

Высказанное утверждение справедливо для элементарных регулярных формул. Предположим, что оно справедливо для формулы определяющей системы, т. е. мы будем для каждого k иметь число N_k такое, что формула $F_1+F_2+\ldots F_{N_k}$ справедлива. k в данном случае пробегает лишь конечное число чисел от 1 до k_r.

Возьмем число $N=\max(N_1, N_2, \ldots N_{k_r}, r)$, тогда очевидно мы будем иметь истинную формулу $F_1+F_2+\ldots F_N$.

Поступило
23 III 1939.