Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. З. ВУЛИХ

О МЕТРИЗАЦИИ СХОДИМОСТЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1939)

В последнее время ряд авторов рассматривал вопрос о введении в линейном топологическом пространстве метрики, сохраняющей заданную топологию. А. Н. Колмогоров (1) установил условия, при которых возможна нормировка линейного топологического пространства, а D. H. Hyers (2) и J. V. Wehausen (3) рассматривали введение произвольной метрики, инвариантной относительно операции сложения. При этом сходимость в смысле метрики естественно оказывается совпадающей с «топологической» сходимостью. Но ясно, что обычную метризацию может допускать только такая сходимость, которая совпадает со своей (*)-сходимостью (определение — см. ниже). Если же некоторая сходимость (в линейном множестве) не обладает этим свойством, то можно поставить вопрос об ее более общей метризации (K-нормировке или инвариантной K-метризации). Этому вопросу и посвящена настоящая заметка. Подробное изложение и доказательства приведенных здесь результатов будут даны в другом месте.

§ 1. Определение. Линейное множество $X=\{x\}$ назовем **линейным L-пространством**, если в нем определено некоторое понятие сходимости (γ) последовательности $\{x_n\}$ к нулевому элементу ($x_n \xrightarrow{\gamma} 0$) и при этом выполнены следующие условия:

1) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ и $y_n \xrightarrow{\gamma} 0$, то $x_n+y_n \xrightarrow{\gamma} 0$;

2) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$, то $\alpha x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ при любом вещественном α;

3) если $\alpha_n \to 0$ (α_n — вещественные числа), то $\alpha_n x \xrightarrow{\gamma} 0$ при любом $x \in X$;

4) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ и $x_n = x$ при всех n, то $x=0$;

5) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ и $n_1 < n_2 < \ldots \to \infty$, то $x_{n_i} \xrightarrow{\gamma} 0$;

6) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ и $y_n \xrightarrow{\gamma} 0$, а $z_n = x_m$ при $n=2m-1$ и $z_n=y_m$ при $n=2m$, то $z_n \xrightarrow{\gamma} 0$;

7) если $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$, а последовательность $\{y_n\}$ получается посредством каких-нибудь перестановок элементов последовательности $\{x'_k\}$, где

$$x'_1 = \ldots = x'_{k_1} = x_1,\ x'_{k_1+1} = \ldots = x'_{k_2} = x_2, \ldots,$$
$$x'_{k_{n-1}+1} = \ldots = x'_{k_n} = x_n, \ldots,$$

а $k_1 < k_2 < \ldots$ — любые целые числа, то $y_n \xrightarrow{\gamma} 0$.

В линейном L-пространстве полагаем $x_n \xrightarrow{\gamma} x$, если $x_n - x \xrightarrow{\gamma} 0$. Единственность предела при этом обеспечена, а также легко проверить, что γ-предел обладает свойствами, аналогичными 1) — 7). Кроме того, если $x_n = x$ при всех n, то $x_n \xrightarrow{\gamma} x$ (т. е. $x \xrightarrow{\gamma} x$). Таким образом линейное L-пространство является частным случаем L-пространства Fréchet [4,5].

Исходя из заданной γ-сходимости, в пространстве X можно ввести некоторую топологию, именно можно считать множество $M \subset X$ замкнутым, если из $x_n \xrightarrow{\gamma} x$ и $x_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует: $x \in M$. Тогда множество X становится топологическим пространством в смысле Riesz — Kuratowski [6]. В этом пространстве можно определить «топологическую» сходимость: $x_n \xrightarrow{t} x$, если любая окрестность точки x содержит почти все x_n. Но в общем случае эта топологическая сходимость будет шире γ-сходимости *.

§ 2. Определение. Пусть в некотором множестве определены две сходимости (γ) и (δ). Назовем δ-сходимость (*)-сходимостью для γ-сходимости, если $x_n \xrightarrow{\delta} x$ тогда и только тогда, когда из любой частичной последовательности $\{x_{n_i}\}$ можно выделить подпоследовательность $x'_n \xrightarrow{\gamma} x$ [7].

Пользуясь этим определением, можно во всяком линейном L-пространстве X построить, кроме заданной γ-сходимости, ее (*)-сходимость. Эта (*)-сходимость также удовлетворяет всем условиям 1) — 7) и будет вообще шире γ-сходимости. Если теперь определить топологию в X, как это было указано в § 1, но исходя из (*)-сходимости, то получается то же самое топологическое пространство, причем в отличие от γ-сходимости (*)-сходимость уже будет совпадать с топологической сходимостью [(7), стр. 497]. Таким образом, если заданная в X γ-сходимость совпадала со своей (*)-сходимостью, то указанный в § 1 процесс приводит к превращению X в линейное топологическое пространство, причем топологическая сходимость в нем совпадает с γ-сходимостью **. В этом случае назовем X LT-пространством.

§ 3. Определения. Пусть X — LT-пространство. Множество $M \subset X$ ограничено, если для любых $x_n \in M$ и $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ [9]. Множество $M \subset X$ выпукло, если из $x_n \in M$, $\alpha_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots k)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, следует $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n \in M$.

Метрику, инвариантную относительно операции сложения, т. е. $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$, назовем F-метрикой.

Для LT-пространств сохраняются следующие теоремы, доказанные для линейных топологических пространств:

Теорема 1. *Для того, чтобы LT-пространство X было нормируемо в смысле Banach'a* [10] (*так, чтобы топологическая сходимость совпала со сходимостью по норме*), *необходимо и достаточно, чтобы в X суще-*

---

* Отметим, что в построенном топологическом пространстве замыкание множества вообще не совпадает с суммой данного множества и множества всех его γ-предельных точек [ср. (7)].

** Здесь мы понимаем линейное топологическое пространство в несколько более широком смысле, чем А. Н. Колмогоров [1] или J. v. Neumann [8], так как у нас операции сложения и умножения непрерывны только в смысле сходимости последовательности, но не в смысле топологии.

ствовала выпуклая, ограниченная окрестность нулевого элемента [1].

Теорема 2. *Для того, чтобы LT-пространство X было F-метризуемо (так, чтобы топологическая сходимость совпала со сходимостью по расстоянию), необходимо и достаточно, чтобы в X выполнялась 1-я аксиома счетности* *.

Последняя теорема была доказана Garrett Birkhoff'ом для топологической группы [11]. Доказательства обеих теорем для LT-пространств могут быть проведены тем же способом, как и для линейных топологических пространств, несмотря на то, что в LT-пространствах непрерывность сложения и умножения имеет место лишь в более слабом смысле.

Легко видеть, что если в X существует ограниченная окрестность нуля, то X удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Отсюда вытекает следствие:

Следствие. *Если в X существует ограниченная окрестность нуля, то X F-метризуемо* [2].

Во всех рассмотренных случаях полнота X в смысле метрики обеспечивается, если X γ-полно, т. е. если из $x_n - x_m \xrightarrow{\gamma} 0$ при любых $n, m \to \infty$ следует, что $x_n \xrightarrow{\gamma} x$.

§ 4. Перейдем к рассмотрению линейных L-пространств. В тех случаях, когда γ-сходимость не совпадает со своей $(*)$-сходимостью, ее нельзя представить как сходимость по норме или по расстоянию, и поэтому мы займемся здесь более общей метризацией пространства.

Определения. Пусть в линейном L-пространстве X для каждого конечного комплекса $K = (x_1, \ldots, x_\nu)$ его элементов определена численная метрическая функция $\rho[K] \geqslant 0$, удовлетворяющая следующим условиям:

I. Если $x_i = x_j$, то

$$\rho[(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_\nu)] = \rho[(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_j, \ldots, x_\nu)] = \\ = \rho[(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_\nu)].$$

II. $\rho[(x)] = 0$ эквивалентно $x = 0$.

III. $\rho[(x_1^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(2)})] \leqslant \rho[(x_1^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)})] + \\ + \rho[(x_1^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(2)})].$

III_1. $\rho[(x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1})] \geqslant \rho[(x_1, \ldots, x_\nu)]$.

IV. $\rho(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(1)} + x_\nu^{(2)})] \leqslant \rho[(x_1^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)})] + \\ + \rho[(x_1^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(2)})].$

Положим $x_n \xrightarrow{k} x$, если $\rho[(x_n - x, \ldots, x_m - x)] \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Если при этом γ-сходимость в X совпадает с так определенной k-сходимостью, назовем пространство X KF-**метризуемым** **.

Если кроме того метрическая функция $\rho[K]$ удовлетворяет дополнительному условию:

V. $\rho[(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_\nu)] = |\alpha| \cdot \rho[(x_1, \ldots, x_\nu)]$ ***, то мы скажем, что пространство X K-**нормируемо** [12].

---

* Такое пространство отличается от пространства типа (F) Banach'a [10] только тем, что в нем может не выполняться требование полноты.

** Специальному изучению пространств с KF-метрикой будет посвящена особая заметка.

*** В этом случае условие III_1 вытекает из остальных [13].

Для решения вопроса о KF-метризуемости линейного L-пространства X введем некоторую топологию в множестве $\mathfrak{K}$ всех конечных комплексов K элементов X. Прежде всего будем рассматривать $\mathfrak{K}$, как линейное множество. Для этого, если $K_1=(x_1^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)})$, $K_2=(x_1^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(2)})$ и $\mu \geqslant \nu$, положим $K_1+K_2=K_2+K_1=(x_1^{(1)}+x_1^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(1)}+x_\nu^{(2)}, x_{\nu+1}^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(2)})$. Умножение определим обычно: если $K=(x_1, \ldots, x_\nu)$, то $\alpha K = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_\nu)$. Кроме того отождествим между собой комплексы $(x_1^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)})$ и $(x_1^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(2)})$ $(\mu \geqslant \nu)$, если $x_i^{(1)}=x_i^{(2)}$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, а $x_{\nu+1}^{(2)}=\ldots=x_\mu^{(2)}=0$. Тогда $\mathfrak{K}$ удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на линейное множество ([10]).

Пусть теперь $K_n=(x_1^{(n)}, \ldots, x_{\nu_n}^{(n)}) \in \mathfrak{K}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Положим $K_n \xrightarrow{k\gamma} 0$, если из любой частичной последовательности $\{K_{n_i}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{K_{n_{i_l}}\}$ такую, что последовательность, составленная из элементов этих комплексов,

$$x_1^{(n_{i_1})}, \ldots, x_{\nu_{n_{i1}}}^{(n_{i_1})}, x_1^{(n_{i_2})}, \ldots, x_{\nu_{n_{i_2}}}^{(n_{i_2})}, \ldots, x_1^{(n_{i_l})}, \ldots, x_{\nu_{n_{i_l}}}^{(n_{i_l})}, \ldots \xrightarrow{\gamma} 0.$$

Из свойств γ-сходимости следует, что $k\gamma$-сходимость $\{K_n\}$ к нулю не нарушится, если любой из K_n заменить каким-нибудь комплексом, отождествленным с K_n. Легко проверить, что $\mathfrak{K}$ оказывается LT-пространством.

Определение. Сходимость (γ) в линейном L-пространстве назовем **регулярной**, если из $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ следует, что существуют числа $n_i \longrightarrow \infty$ и $p_i \geqslant 0$ такие, что из последовательности комплексов $K_i = (x_{n_i}, \ldots, x_{n_i+p_i})$ нельзя выделить такую подпоследовательность $\{K_{i_l}\}$, элементы которой образовывали бы последовательность

$$x_{n_{i_1}}, \ldots, x_{n_{i_1}+p_{i_1}}, \ldots, x_{n_{i_l}}, \ldots, x_{n_{i_l}+p_{i_l}}, \ldots,$$

γ-сходящуюся к нулю *.

С помощью теорем 1—2 доказываются следующие теоремы:

Теорема 3. *Для того, чтобы линейное L-пространство X было K-нормируемо, необходимо и достаточно, чтобы γ-сходимость была регулярна и чтобы в пространстве $\mathfrak{K}$ существовала выпуклая, ограниченная окрестность нулевого элемента.*

Теорема 4. *Для того, чтобы линейное L-пространство X было KF-метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы γ-сходимость была регулярна и чтобы в $\mathfrak{K}$ выполнялась 1-я аксиома счетности.*

Следствие. *Если в $\mathfrak{K}$ существует ограниченная окрестность нуля и γ-сходимость регулярна, то X — KF-метризуемо.*

Во всех этих случаях, если X γ-полно, то оно и K-полно, т. е. из $\rho[(x_n-x_p, \ldots, x_m-x_p)] \longrightarrow 0$ при $n, m, p \longrightarrow \infty$ следует, что $x_n \xrightarrow{k} x$.

§ 5. Предыдущие теоремы легко могут быть применены к полуупорядоченным пространствам Л. В. Канторовича ([14]). Пусть X — линейное полуупорядоченное пространство, удовлетворяющее аксиомам I—V **. Из теории Л. В. Канторовича следует, что если за γ-сходимость в X

---

* Если γ-сходимость совпадает со своей $(*)$-сходимостью, то она необходимо регулярна.

** Мы считаем известными основные понятия и обозначения статьи ([14]).

принять обыкновенную сходимость [(o)-сходимость], то X будет линейным L-пространством. Кроме (o)-сходимости в X можно рассматривать ее $(*)$-сходимость. Обозначим через X^* LT-пространство, которое получается из множества X, если за γ-сходимость принять $(*)$-сходимость. Легко доказывается следующая теорема:

Теорема 5. *Если в линейном полуупорядоченном пространстве X (o)-сходимость регулярна (в смысле предыдущего параграфа) и если пространство X^* нормируемо в смысле Banach'а (соотв. F-метризуемо), то X K-нормируемо (соотв. KF-метризуемо).*

Условие теоремы также и необходимо.

Замечания: 1. Если линейное полуупорядоченное пространство X KF-метризуемо, то метрическая функция всегда может быть определена с соблюдением условия:

$$\rho\left[(x_1, \ldots, x_\nu)\right] = \rho\left[\left(\sup\left(|x_1|, \ldots, |x_\nu|\right)\right)\right].$$

2. Регулярность (o)-сходимости в X будет обеспечена, если X^* F-метризуемо с соблюдением условия:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \longrightarrow \infty \text{ влечет } \rho(x_n, 0) \longrightarrow \infty.$$

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета.

Поступило
26 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Studia Math., **5**, 29—33 (1934). [2] D. H. Hyers, Bull. Am. Math. Soc., **44**, 76—80 (1938). [3] J. V. Wehausen, Duke Math. Journ., **4**, 157—169 (1938). [4] M. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris, p. 164 (1928). [5] F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin, 230 (1927). [6] C. Kuratowski, Topologie, Warszawa, p. 15 (1933). [7] F. Hausdorff, Fund. Math., **25**, 486—502 (1935). [8] J. v. Neumann, Trans. Amer. Math. Soc., **37**, 1—20 (1935). [9] S. Mazur u. W. Orlicz, Studia Math., **4**, 152—157 (1933). [10] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, стр. 26 (1932). [11] Garrett Birkhoff, Compositio Math., **3**, 427—430 (1936). [12] Б. З. Вулих, ДАН, IV, 295—298 (1935); B. Vulich, Ann. of Math., **38**, 156—174 (1937). [13] Б. З. Вулих, ДАН, III, 109—110 (1936). [14] Л. В. Канторович, Мат. сборник, **2**, 121—168 (1937).