

УДК 539.3:621.763:621.897

## ТРЕНИЕ АНОМАЛЬНО УПРУГИХ ТЕЛ. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА. ЧАСТЬ 2: РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ САМОСТОПОРЕНИЯ\*

С. В. ШИЛЬКО<sup>а+</sup>, А. И. СТОЛЯРОВ<sup>б</sup>

С помощью конечноэлементного моделирования проведен расчет НДС и несущей способности фрикционного соединения с элементом скольжения из материала с отрицательным коэффициентом Пуассона. Эффект самостопорения при использовании сверхсжимаемого материала обусловлен формированием в области контакта устойчивой зоны концентрации тангенциальных напряжений, обеспечивающей адаптацию соединения к росту нагрузки.

**Ключевые слова:** фрикционное соединение, сверхсжимаемый материал, отрицательный коэффициент Пуассона, самостопорение, численное моделирование, концентрация напряжений

**Введение.** Ранее обсуждались результаты исследования эффекта самостопорения, заключающегося в увеличении силы трения при стесненном деформировании тела из аномально упругого (сверхсжимаемого) материала с отрицательным коэффициентом Пуассона [1]. Эффект самостопорения моделировался предварительным смещением с "упрочнением", пропорциональным внешней нагрузке, что позволило выяснить некоторые особенности трения тел из сверхсжимаемого материала.

Однако оценка параметров контактного взаимодействия в [1] является приближенной для сопряжений конечных размеров. Кроме того, для повышения точности модели следует принять во внимание влияние наложения напряжений от растяжения упругого элемента на поле напряжений, создаваемое контактной нагрузкой.

Ниже сообщаются результаты расчета параметров самостопорения для элемента скольжения конечных размеров с учетом напряжений растяжения, что позволяет оценить несущую способность соединения реальных деталей. Рассмотрим нагружение фрикционного соединения, образованного защемлением упругой пластины между жесткими плитами (рис. 1, а). Для исключения перемещений и поворота обе плиты закреплены по наружным поверхностям. Предварительный натяг в соединении обеспечивается заданием на наружной поверхности верхней плиты постоянного нормального смещения  $v(x) = \delta_n^0 = \text{const}$ . К торцевой поверхности пластины прикладывается тангенциальное усилие  $T$ .

Необходимо определить напряженно-деформированное состояние (НДС) контакта и предельное усилие  $T_{\text{лп}}$  (несущую способность соединения) при варьировании коэффициента Пуассона в пределах, определяемых известным соотношением теории упругости [2]

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{6K + 2\mu} \quad (1)$$

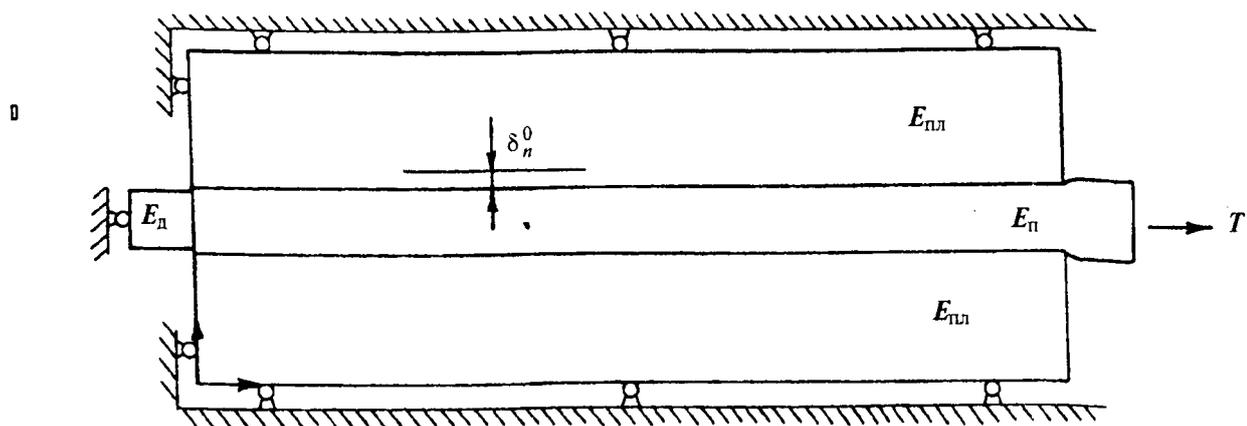
\* Работа выполнялась при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. Проект № Т-95/294.

<sup>а</sup> Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого АН Беларуси. 246652, Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 32-А.

<sup>б</sup> Гомельский политехнический институт им. П.О. Сухого. 246746, Беларусь, г. Гомель, пр. Октября, 48.

<sup>+</sup> Автор, с которым следует вести переписку.

а



б

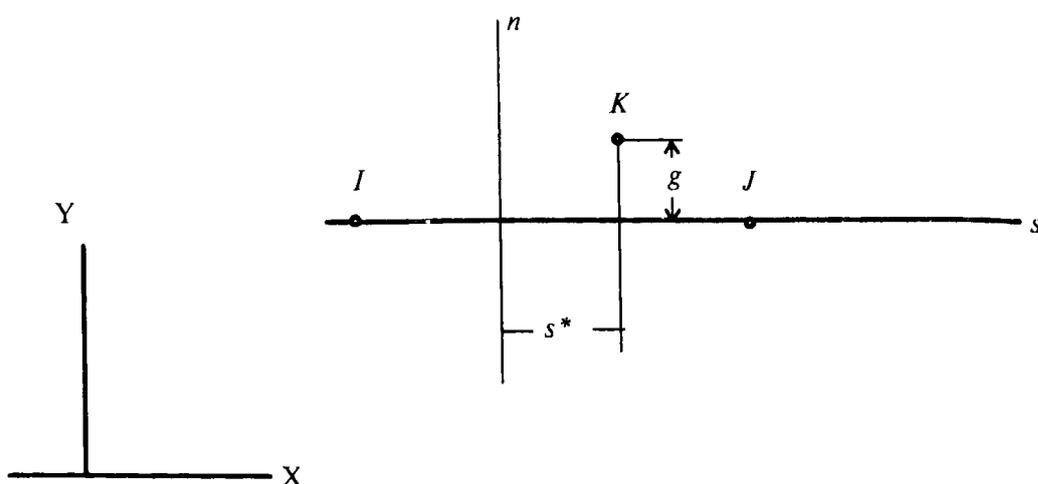


Рис. 1. Постановка задачи: а — вид фрикционного соединения, б — локализация контактного взаимодействия

**Метод решения.** Для расчета  $T_{lim}$  задавалось ступенчатое увеличение тангенциальной силы до наступления скольжения пластины. Расчет компонент НДС на каждом этапе нагружения выполнялся с использованием программы конечноэлементного анализа ANSYS версии 5.0A [3]. В настоящей работе не комментируется описанный в литературе опыт применения метода конечного элемента для решения разнообразных контактных задач. Как отмечалось ранее в работе [1], в рассматриваемой задаче нормальная нагрузка, т.е. реакция со стороны плит, на элемент скольжения не задана, а зависит от тангенциального усилия  $T$ . Кроме того, зона приложения в процессе деформирования пластины уменьшается. Таким образом, задача относится к сравнительно немногочисленным исследованиям взаимодействия тел согласованной формы с отставанием, когда область нагруженного контакта полностью содержится внутри области ненагруженного контакта [4].

Дискретизация границ тел осуществлялась специальными трехузловыми элементами, позволяющими описать контактную область переменной длины при плоской деформации в глобальных координатах  $X$ - $Y$ . Локальное контактное взаимодействие двух поверхностей может быть представлено в координатах  $n$ - $s$  с помощью трех узловых точек, из которых одна точка ( $K$ ) является подвижной, а точки  $I$  и  $J$  принадлежат сопряженной границе контртела (рис.1, б). Для каждого контактного узла  $K$  определяется компонента  $g$ , имеющая смысл зазора, и проекция  $s^*$ , вычисляемые по формулам

$$g = (\{x_k\} - \{x_i\})^T \{n\}, \quad (2)$$

$$s^* = -1 + 2[(\{x_k\} - \{x_i\})^T \{s\}] L^{-1} \quad (3)$$

$$L = \|\{x_j\} - \{x_i\}\|.$$

Для решения контактной задачи используется алгоритм штрафных функций, обеспечивающий приближенное удовлетворение граничного условия непроникания с помощью коэффициента контактной жесткости  $K_n$  (параметра штрафа)

$$F_n = \begin{cases} K_n g, & g \leq 0, \\ 0, & g > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для описания фрикционного взаимодействия на основании "упругой" модели трения предварительно вычисляются тангенциальные перемещения контактных узлов

$$u_s = \frac{1}{2}(s^* - s_0^*)L. \quad (5)$$

Перемещение контактной точки  $K$  разделяется на упругую  $u_s^e$  и неупругую  $u_s^s$  (скольжение) компоненты

$$u_s = u_s^e + u_s^s. \quad (6)$$

Соотношение поверхностных сил определяет тип зоны контакта: сцепления  $S_a$  или скольжения  $S_s$

$$F_s = \begin{cases} K_t u_s^e \leq \bar{F}_s & \text{на } S_a, \\ \bar{F}_s & \text{на } S_s, \end{cases} \quad (7)$$

где предельная сила трения  $\bar{F}_s = fF_n$ .

Применяемая в программе ANSYS вычислительная процедура подобна методу неассоциированной теории пластичности, когда на каждом промежуточном шаге вычисляется упругий предиктор, корректируемый с учетом ограничений закона трения с фиксацией малых упругих перемещений. Следовательно, в данной модели контакт вначале интерпретируется как упругое сцепление с нулевой силой трения для оценки взаимопроникания границ  $g$  и положения контактной точки  $s^*$  без учета фрикционного взаимодействия. При выполнении последующих шагов допускается появление сил трения, вычисляемых по формуле (7).

Для получения устойчивого конечноэлементного решения жесткое смещение пластины исключалось путем формального закрепления ее левого края с помощью дополнительного элемента малой жесткости с модулем Юнга  $E_d \ll E_n$ .

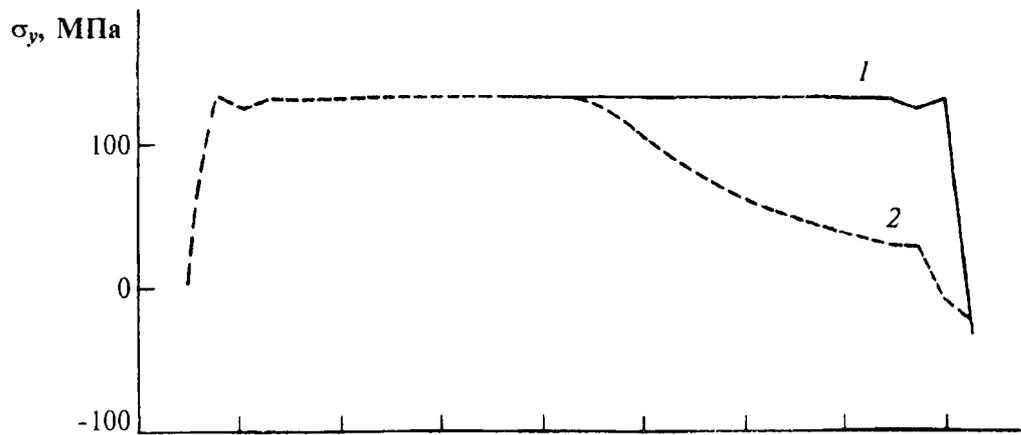
**Результаты исследования.** Расчет напряженно-деформированного состояния соединения выполнялся при следующих исходных параметрах: модули Юнга материала пластины и дополнительного упругого элемента  $E_n = 10$  ГПа и  $E_d = 1$  МПа соответственно; общая длина пластины  $l = 170$  мм, толщина  $h = 10$  мм, длина свободной части пластины вне начального контакта  $\Delta l = 10$  мм, нормальное смещение плиты (натяг)  $\delta_n^0 = 100$  мкм. Коэффициенты нормальной и тангенциальной жесткости выбирали по условию  $K_n = 100 E_n$ ;  $K_t = 0,01 K_n$ . Дискретизация расчетной области: общее число контактных элементов  $N_k = 800$ ; число элементов пятислойного разбиения пластины  $N_n = 200$ . Для интерпретации результатов расчета использовались компоненты НДС для выборки из 30 элементов, равномерно расположенных по всей контактной поверхности пластины — верхняя плита.

Рассмотрим кинетику напряжений  $\sigma_y(x)$ ,  $\tau_{xy}(x)$  и перемещений  $v(x)$ ,  $u(x)$  на контактной поверхности в процессе ступенчатого тангенциального нагружения (рис. 2–5).

С целью исследования влияния сжимаемости материала пластины на НДС соединения были выполнены две серии расчетов: для отрицательного коэффициента Пуассона  $\nu = -0,3$  (параметры обозначены индексом  $n$ ) и положительного значения  $\nu = 0,3$  (параметры имеют индекс  $p$ ). Коэффициент трения  $f$  принимался равным 0,3.

При отсутствии сдвигающего усилия  $T$  среднее значение контактных давлений от предварительного натяга оказывается более высоким для  $\nu > 0$ :  $\bar{\sigma}_y^p = 133 \text{ МПа} > \bar{\sigma}_y^n = 115 \text{ МПа}$  (рис. 2, кривая 1). Максимальные тангенциальные напряжения  $\tau_{xy}$  для обоих вариантов невелики и локализованы у краев контакта, причем концентрация этих напряжений в случае аномально упругого материала выражена более резко, чем для материала с положительным коэффициентом Пуассона (рис. 3, кривая 1). Так, если в точке краевой зоны  $x = 159 \text{ мм}$  уровень напряжения  $\bar{\tau}_{xy}^p \cong -16 \text{ МПа}$  соответствует локальной силе трения  $f \bar{\sigma}_y^p \cong 40 \text{ МПа}$ ; то для  $\bar{\tau}_{xy}^n \cong 29 \text{ МПа}$  имеем  $f \bar{\sigma}_y^p \cong 34 \text{ МПа}$ .

*a*



*б*

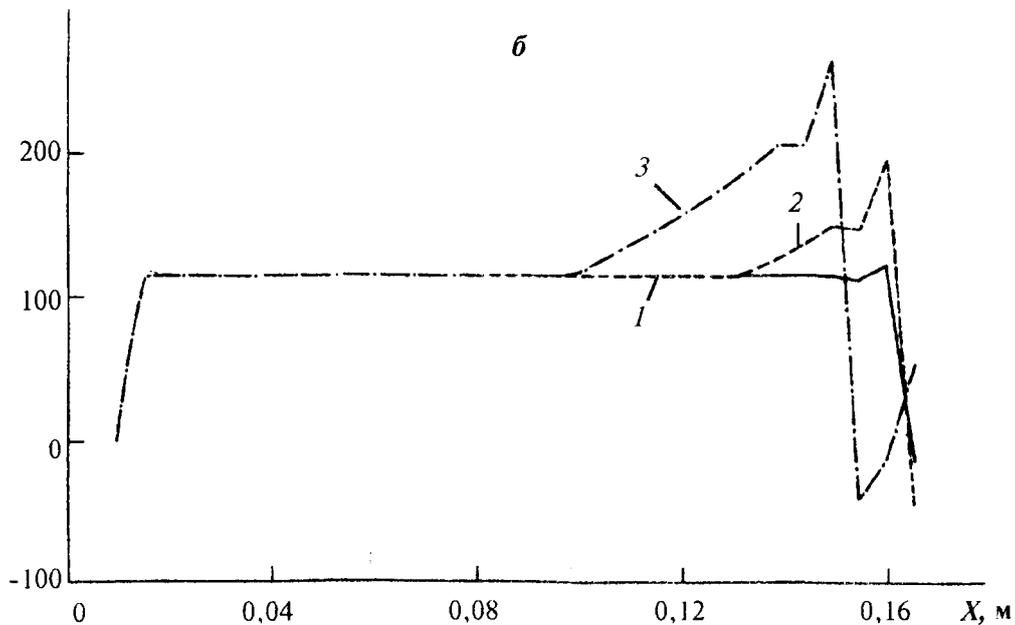


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_y(x)$  для положительного и отрицательного коэффициентов Пуассона: *a* —  $\nu = -0,3$ ; *б* —  $\nu = 0,3$ . Кривая 1 соответствует  $T = 0$ ; 2 —  $T = 400 \text{ Н/мм}$ ; 3 —  $T = 1200 \text{ Н/мм}$

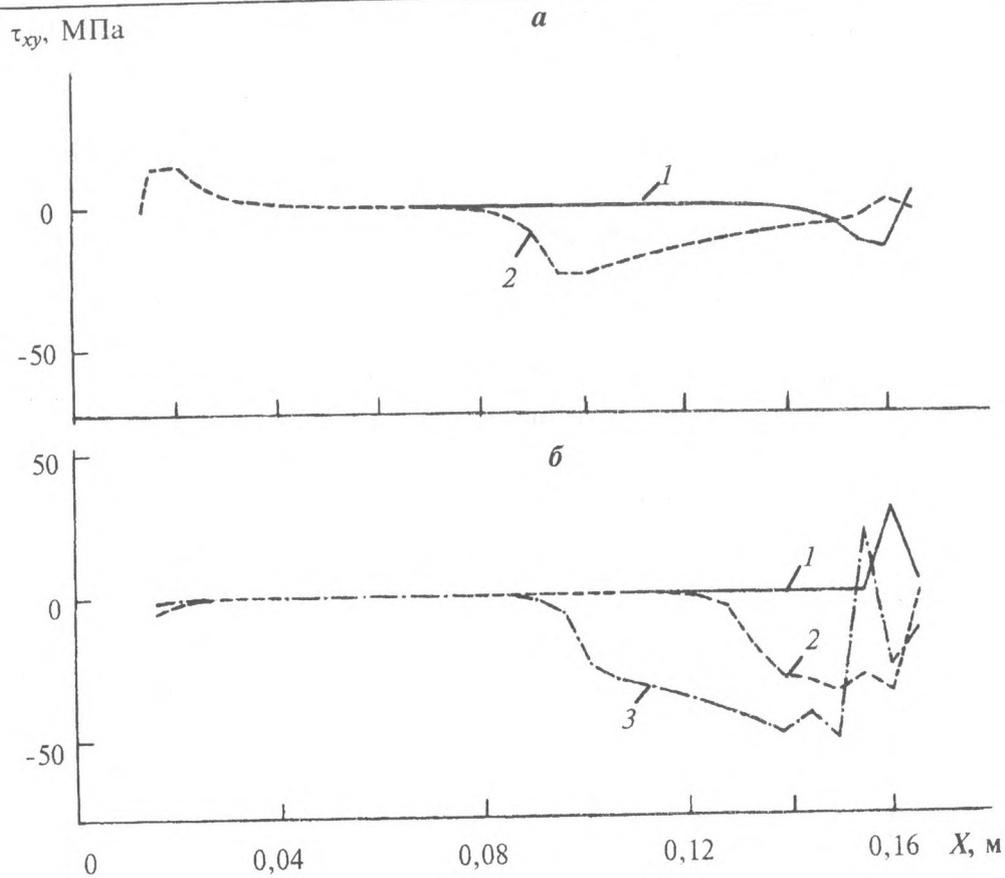


Рис. 3. Распределение тангенциальных напряжений  $\tau_{xy}(x)$ . Обозначения те же, что на рис. 2

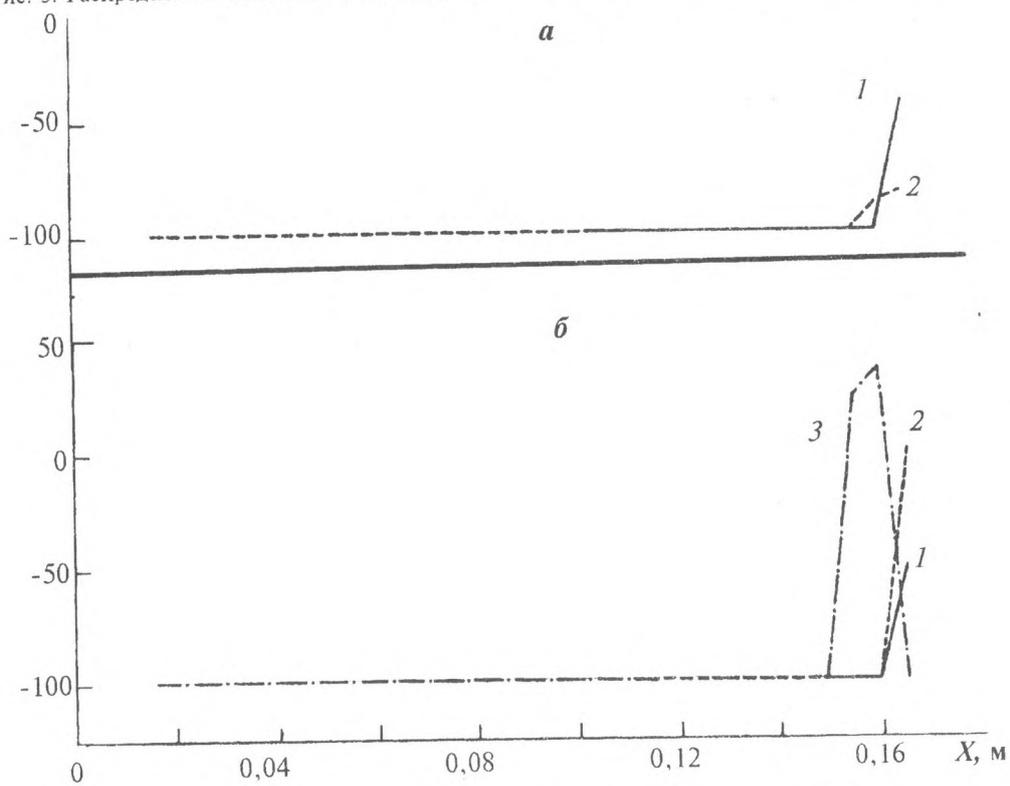


Рис. 4. Распределение нормальных перемещений  $v(x)$ . Обозначения те же, что на рис. 2

Анализируя нормальные перемещения для сопоставляемых материалов при ненулевом усилии  $T$ , можно заметить, что к прогибу свободной поверхности элемента скольжения от контактной нагрузки со стороны плит добавляется перемещение, вызванное поперечной деформацией при растяжении (рис. 4). В зависимости от относительной величины указанных компонент суммарное перемещение может быть либо отрицательным, либо положительным. При положительном коэффициенте Пуассона в условиях стесненной деформации данный фактор вызывает ослабление натяга в соединении (рис. 2, а). Так, при действии нагрузки  $T = 400$  Н/мм среднее давление  $\bar{\sigma}_y^p$  в зоне кромки уменьшается со 131 МПа до 54 МПа. В противоположность этому, сочетание контактной деформации и растяжения материала, имеющего  $\nu = -0,3$  (рис. 2, б), приводит к заметному увеличению аналогичного напряжения  $\bar{\sigma}_y^n$  в краевой зоне (от 122 МПа до 197 МПа).

Рис. 5 иллюстрирует распределение тангенциальных перемещений  $u(x)$  в области контакта пластины и верхней плиты. При сжатии проскальзывание локализуется в узкой зоне вблизи краев контакта, а его направление меняется на противоположное при изменении знака  $\nu$ .

При  $T \rightarrow T_{\text{lim}}$  проскальзывание нелинейно увеличивается в зависимости от тангенциального усилия. Распределение перемещений  $u(x)$  свидетельствует о различной кинетике проскальзывания при отсутствии и наличии эффекта самостопорения. Так, если в первом случае максимум проскальзывания  $u_{\text{max}}^p$  при  $T = 400$  Н/мм равен 341 мкм, то при самостопорении имеем  $u_{\text{max}}^n = 41$  мкм.

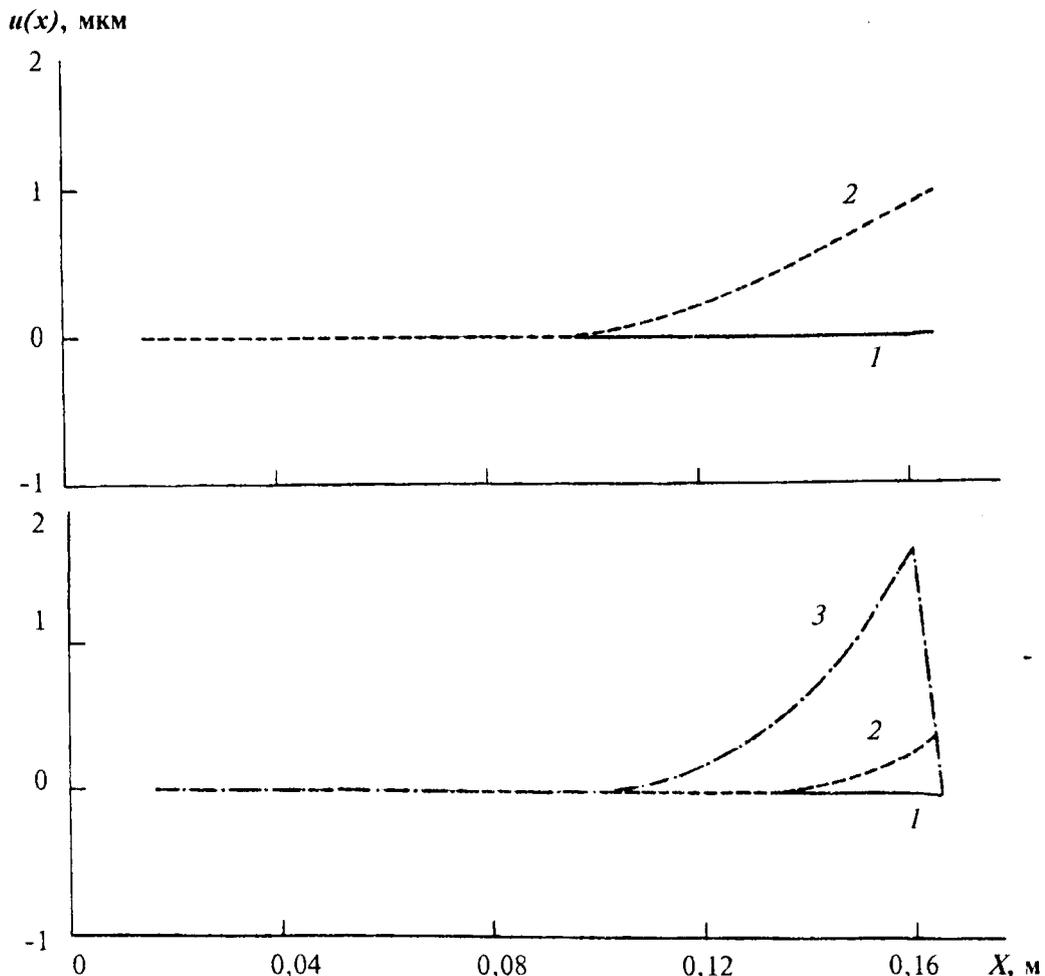


Рис. 5. Распределение тангенциальных перемещений  $u(x)$ . Обозначения те же, что на рис. 2

Как видно из рис. 3, тангенциальное усилие воспринимается в основном краевой зоной контакта, примыкающей к нагруженной торцевой поверхности. При увеличении сдвига элемента скольжения, изготовленного из материала с обычной степенью сжимаемости, зона восприятия нагрузки перемещается вглубь контакта, что приводит к быстрому истощению несущей способности соединения. В частности, кривая 2 на рис. 3а соответствует распределению  $\tau_{xy}(x)$  при нагрузке  $T = 400$  Н/мм, близкой к предельной.

При стесненной деформации аномально упругого материала напряжения  $\tau_{xy}(x)$  претерпевают изменения в знаке, а затем формируется устойчивая зона концентрации  $\tau_{xy}(x)$ , что свидетельствует о возможности восприятия значительно более высокой действующей нагрузки (рис. 3, б). Таким образом, непрерывное увеличение натяга приводит к такому перераспределению сил трения, которое способствует адаптации фрикционного соединения к росту нагрузки (самостопорению). Размеры зон проскальзывания и сцепления, найденные по граничному условию в напряжениях (7), близки к оценкам, полученным на основании анализа перемещений  $u(x)$  (рис. 5).

Зависимость предельной тангенциальной нагрузки  $T_{\text{lim}}$ , соответствующей началу макроскольжения, от коэффициентов трения и Пуассона показана на рис. 6. Уменьшение коэффициента Пуассона и увеличение коэффициента трения сопровождается нелинейным ростом  $T_{\text{lim}}$ . Расчет для коэффициента Пуассона  $\nu = -0,9$ , близкого к теоретическому нижнему пределу  $\nu = -1$ , что следует из (1) при  $K \rightarrow 0$ , дает весьма большое значение предельного усилия  $T_{\text{lim}} = 7600$  Н/мм. В этом случае несущая способность соединения, вероятно, будет определяться объемной прочностью элемента скольжения.

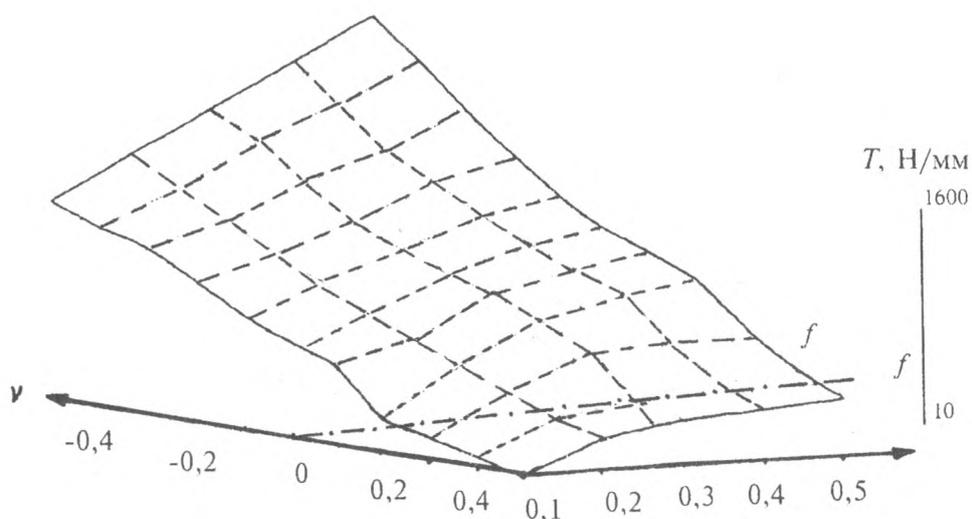


Рис. 6. Зависимость предельной тангенциальной силы  $T_{\text{lim}}$  от коэффициента трения  $f$  и коэффициента Пуассона  $\nu$

### Выводы

Таким образом показано, что тангенциальное усилие воспринимается краевой зоной соединения со стороны приложения усилия. Эффект самостопорения при использовании сверхсжимаемого материала обусловлен тем, что в области контакта формируется устойчивая зона концентрации тангенциальных напряжений, обеспечивающая восприятие растущей нагрузки.

### Литература

1. Шилько С. В. Трение аномально упругих тел. Отрицательный коэффициент Пуассона. Часть I: Реализация эффекта самостопорения // Трение и износ, **15** (1995), №3, 429–437
2. Ляв Л. Математическая теория упругости. Москва—Л-д: ОНТИ (1935)
3. ANSYS Revision 5.0A. Users Manual. 1—4 п/ж (1994)
4. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. Москва, (1989).

## Обозначения

$T$ ,  $T_{\text{lim}}$  – текущее и предельное значения тангенциальной нагрузки;  $\delta_n^0$  – начальное нормальное смещение плиты (натяг);  $K_n$ ,  $K_t$  – коэффициенты нормальной и тангенциальной контактной жесткости;  $g$  – зазор;  $s^*$ ,  $s_0^*$  – проекции контактной точки, определенные на текущем и предыдущем шагах расчета;  $L$  – расстояние между соседними узлами;  $s$ ,  $n$  – локальные координаты;  $\{n\}$ ,  $\{s\}$  – единичные нормальный и тангенциальный векторы;  $x$ ,  $y$  – глобальные координаты;  $u_s^e$ ,  $u_s^s$  – упругая и неупругая (скольжение) компоненты тангенциального перемещения;  $F_s$ ,  $F_n$  – тангенциальная и нормальная силы в контактном узле;  $f$  – коэффициент трения;  $S_s$  – зона проскальзывания;  $S_a$  – зона сцепления;  $E_d$ ,  $E_p$  – модули Юнга материала пластины и дополнительного элемента соответственно;  $l$ ,  $\Delta l$  – общая длина пластины и длина ее части вне начального контакта,  $h$  – толщина пластины;  $v(x)$ ,  $u(x)$  – нормальные и тангенциальные перемещения поверхности пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\sigma_y(x)$  и  $\tau_{xy}(x)$  – нормальные и тангенциальные напряжения.

Поступила в редакцию 10.06.96

Shilko S.V., Stolyarov A.I. Friction of anomalously elastic bodies. Negative Poisson's ratio. Part 2. Calculation of self-locking effect

The frictional joint made of material with negative Poisson's ratio and self-locking effect are studied by means of finite element modelling. The numerical results have shown that pressure concentration under tangential loading provides the friction force increasing.