Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Н. САВИН

НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ РАВНЫХ ВЫРЕЗОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 III 1939)

§ 1. Допустим, что упругая среда заполняет плоскость oxy, в которой имеется неограниченный ряд контруентных вырезов произвольной формы, расположенных так, что каждый последующий вырез получается передвижением предыдущего на 2π вдоль оси ox. К контуру каждого из вырезов приложены равные в соответствующих точках внешние усилия X_n, Y_n, статически эквивалентные нулю на каждом контуре. Возьмем начало координат внутри одного из контуров и мысленно разобьем всю плоскость oxy на бесконечный ряд полос шириною 2π прямыми... $y=-3\pi, y=-\pi$; $y=-\pi, y=\pi$; $y=\pi, y=3\pi$ и т. д., считая при этом, что каждый вырез полностью лежит внутри соответствующей полосы. Компоненты напряжений и деформаций будут периодическими функциями с периодом 2π. Достаточно поэтому рассмотреть их в полосе: $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant +\pi$ с данным вырезом.

Применяя обычный метод ([1]), можно доказать, что поставленная нами задача имеет единственное решение при условиях: 1) компоненты напряжений X_x, Y_y, X_y при $y \to \infty$ равномерно стремятся к **нулю** и 2) компоненты деформации u, v — ограниченные величины.

Таким образом решение поставленной задачи свелось к определению компонентов напряжений и деформаций в полосе с данным вырезом, по контуру l которого заданы внешние усилия X_n, Y_n. Обозначим через S область, ограниченную прямыми $y=-\pi$; $y=\pi$ и контуром l выреза, через S^* область внутри l.

§ 2. Решение плоской задачи теории упругости по заданным внешним усилиям X_n и Y_n на контуре, как известно ([1]), сводится к определению двух аналитических функций комплексной переменной $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих контурному условию:

$$\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) = -i\int_0^s (X_n - iY_n)\, ds + \overline{C} = f_1 - if_2, \tag{1}$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Компоненты напряжений X_x, Y_y и X_y и деформаций u и v по найденным функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из формул:

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 4\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\} \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{3}$$

Так как левые части уравнений (2) и (3), как это следует из самой постановки задачи, суть периодические функции периода 2π, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ непременно должны быть вида:

$$\varphi(z)=\varphi_0(z); \quad \psi(z)=\psi_0(z)-z\,\varphi_0'(z), \tag{4}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — периодические функции периода 2π.

Контурное условие (1) и формулы для напряжений и деформаций (2) и (3) в функциях $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ будут иметь вид:

$$\overline{\varphi_0(z)}+(\bar{z}-z)\,\varphi_0'(z)+\psi_0(z)=f_1-if_2, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_x+Y_y=4\operatorname{Re}\{\varphi_0'(z)\}\\ &Y_y-X_x+2iX_y=2\left[(z-\bar{z})\,\varphi_0''(z)+\psi_0'(z)-\varphi_0'(z)\right]\end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\,\varphi_0(z)-(z-\bar{z})\,\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}. \tag{7}$$

Исходя из теоремы единственности и из периодичности функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, можно доказать, что функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определены с точностью до выражения вида:

$$\varphi_0(z)=C_1^*; \quad \psi_0(z)=-\overline{C}_1^*, \tag{8}$$

где C_1^* — произвольная комплексная постоянная.

Отобразим полосу $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant+\pi$ на плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси ox при помощи функции:

$$w=e^{iz}. \tag{9}$$

Контур выреза переходит в некоторый замкнутый контур L, не содержащий внутри себя начала координат. Обозначим через $\sum$ бесконечную область вне контура L выреза, через $\sum^*$ область внутри L.

Функции $F_1(w)=\varphi_0(-i\ln w)$ и $F_2(w)=\psi_0(-i\ln w)$ голоморфны в области $\sum$ и удовлетворяют на L условию:

$$\overline{F_1(w)}-w\,(\overline{\ln w}+\ln w)\,F_1'(w)+F_2(w)=f_1-if_2. \tag{10}$$

Для определения функций $F_1(w)$ и $F_2(w)$ применим прием Н. И. Мусхелишвили [2].

Умножим обе части уравнения (10) на $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{dw}{w-w_e}$, где w_e — точка области $\sum^*$, и проинтегрируем по контуру L в положительном направлении относительно области $\sum$, тогда получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{F_1(w)}}{w-w_e}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{w\,(\ln\overline{w}+\ln w)}{w-w_e}F_1'(w)\,dw=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f_1-if_2}{w-w_e}\,dw=A_1-iA_2+\overline{C}. \tag{11}$$

Устремляя в (11) $w_e\to w_0$, где w_0 — некоторая точка на контуре L, и складывая (11) с очевидными равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\overline{F_1(w)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{F_1(w)}}{w-w_e}\,dw=0\\ &-\frac{w_0\,(\overline{\ln w_0}+\ln w_e)}{2}F_1'(w_0)+\frac{w_0\,(\overline{\ln w_0}+\ln w_0)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{F_1'(w)}{w-w_e}\,dw=0\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

После простых преобразований получим:

$$\overline{F_1(w_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\overline{F_1(w)}\,d\left\{\ln\frac{\overline{w}-\overline{w}_0}{\overline{w}-\overline{w}_0}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(w)\,d\left\{\frac{w_0\ln(\overline{w}_0w_0)-w\ln(\overline{w}\cdot w)}{w-w_0}\right\}=-A_1^{(e)}+iA_2^{(e)}-\overline{C}, \tag{13}$$

где $A_1^{(e)} - iA_2^{(e)} + \overline{C}$ — предел правой части уравнения (11) при стремлении точки w_e к точке w_0 на контуре L изнутри L. Уравнение (13) представляет собою интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с регулярным ядром. Однако уравнение (13), вообще говоря, неразрешимо, так как однородное уравнение (13) имеет нетривиальное решение. Следуя Д. И. Шерману ([3]), изменим несколько наше уравнение (13) прибавлением к его левой части оператора

$$i\,\overline{\ln w}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{b}{2\pi}\int\limits_L \frac{F_1(w)\,dw}{(w-b)^2}\right\}, \tag{14}$$

где b — некоторая точка внутри $\sum^*$.

Итак, уравнение, решающее поставленную нами задачу, будет иметь вид:

$$\overline{F_1(w)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{F_1(w)}\, d\left\{\ln\frac{w-w_0}{\overline{w}-\overline{w}_0}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(w) d\left\{\frac{w_0 \ln(\overline{w}_0 w_0) - w\ln(\overline{w}\cdot w)}{w-w_0}\right\} +$$
$$+ i\,\overline{\ln w}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{b}{2\pi}\int\limits_L \frac{F_1(w)\,dw}{(w-b)^2}\right\} = -A_1^{(e)} + iA_2^{(e)} - \overline{C}_1. \tag{15}$$

§ 3. Исследование уравнения (15) можно вести по той же схеме, как и у Н. И. Мусхелишвили ([3]). Допустим, что существует решение уравнения (15), если ввести в рассмотрение функции:

$$\Phi(w_e) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_1(w)}{w-w_e}\,dw \tag{16}$$

и

$$\Psi(w_e) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{F_1(w)}}{w-w_e}\,dw +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{w\ln(\overline{w}\cdot w)}{w-w_e} F_1'(w)\,dw + A_1 - iA_2 + \overline{C}, \tag{17}$$

то мы придем к уравнению:

$$\overline{\Phi(w)} + w_0\left(\overline{\ln w_0} + \ln \overline{w}_0\right)\Phi'(w) - \Psi(w) + i\,\overline{\ln w}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{b}{2\pi}\int\limits_L \frac{F_1(w)}{(w-b)^2}\,dw\right\} = 0. \tag{18}$$

Функции $\Phi(w)$ и $\Psi(w)$, как это следует из (16) и (17), — голоморфные функции в области $\sum^*$.

Уравнение (18) в переменной z имеет вид:

$$\overline{F(z)} + (z-\overline{z})F'(z) - G(z) + \overline{z}\,\mathrm{Re}\{F'(a)\} = 0, \tag{19}$$

где

$$\Phi(w) = F(z); \quad \Psi(w) = G(z); \quad a = -i\ln b.$$

Умножая обе части уравнения (19) на dz и интегрируя по контуру l, получим, что:

$$\mathrm{Re}\{F'(a)\} = 0. \tag{20}$$

Откуда

$$\overline{F(z)} + (z-\overline{z})F'(z) - G(z) = 0. \tag{21}$$

Введя обозначения:

$$F(z) = iF^*(z); \quad G(z) - zF'(z) = iH^*,$$

представим уравнение (21) в виде:

$$\overline{F^*(z)} + \overline{z}F'^*(z) + H^*(z) = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) соответствует контурной задаче теории упругости с нулевыми внешними усилиями на контуре. Согласно теореме единственности ([1]) функции $F^*(z)$ и $H^*(z)$ имеют вид:

$$F^*(z) = iC_1 z + C_2; \quad H^*(z) = -\overline{C}_2, \tag{23}$$

где C_1 — вещественная постоянная, C_2 — комплексная. И следовательно

$$F(z) = -C_1 z + iC_2; \quad G(z) = -C_1 z - i\overline{C}_2. \tag{24}$$

Из (20) и (24) следует, что $C_1 \equiv 0$, т. е.

$$F(z) = iC_2; \quad G(z) = -i\overline{C}_2. \tag{25}$$

Из уравнений (16), (17) и (25) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(w_e) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1(w)}{w - w_e}\,dw = iC_2 \\ \Psi(w_e) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_1(w)}}{w - w_e}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{w \ln(\overline{w}\cdot w)}{w - w_e} F_1'(w)\,dw + \\ &\quad + A_1 - iA_2 + \overline{C} = -i\overline{C}_2. \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Введя новую функцию $F_1^* = F_1 + iC_2$ и подставляя ее в уравнения (26), получим, что функция F_1^* есть голоморфная функция в области $\sum$, удовлетворяющая уравнению (11), в котором изменена правая часть на постоянную величину $2i\overline{C}_2$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1^*(w)}{w - w_e}\,dw = 0 \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_1^*(w)}}{w - w_e}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{w \ln(\overline{w}\cdot w)}{w - w_e} F_1'^*(w)\,dw = A_1 - iA_2 + \overline{C} + 2i\overline{C}_2. \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Следует заметить, что постоянная C_2 выпадает при восстановлении $F_1^*(w)$ интегралом Коши в области $\sum$, так что при фактическом решении задачи ее нет надобности и определять.

Можно доказать, что поставленная задача имеет единственное решение. Это решение может быть получено из интегрального уравнения (15), которое имеет единственное решение. Последнее утверждение можно доказать, следуя Д. И. Шерману ([4]).

В заключение выражаю благодарность проф. С. Г. Михлину за весьма ценные указания, данные мне при выполнении настоящей работы.

Институт горной механики
Академии Наук УССР.
Днепропетровск.

Поступило
28 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости (1935). [2] Н. И. Мусхелишвили, ДАН, III (1934). [3] Д. И. Шерман, Плоская задача теории упругости для анизотропной среды, Труды Сейсм. ин-та Ак. Наук СССР, № 86 (1938). [4] Д. И. Шерман, Труды Тбилисского матем. ин-та, II (1937).